Voie scientifique : première année

I – Algèbre et combinatoire

1) Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu. En ce qui concerne les notations, on s'efforcera de conserver le langage naturel (il existe, quel que soit, ...) et on n'introduira qu'en situation les notations $\sum, \prod, \bigcup, \bigcap$ *...*

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Appartenance. Inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E ; union, intersection, complémentaire.
Produit cartésien de deux ensembles.

b) Applications

Définition. Composée de deux applications.
Restriction et prolongement d'une application.

Équations. Applications injectives, surjectives, bijectives.

On montrera le lien entre l'ensemble des solutions d'une équation et les propriétés de l'application associée.

Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.
Opérations sur les parties et sur leurs fonctions indicatrices.

Notation $\mathbb{1}_A$.
On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.

2) Combinatoire

L'objectif est d'apprendre à organiser quelques données combinatoires de base (listes, arrangements, permutations, combinaisons) et à exploiter les règles de dénombrement qui en résultent par l'étude d'exemples, issus notamment du calcul de probabilités.

Dénombrement des ensembles suivants :
– parties d'un ensemble à n éléments ;

– parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, notation $\binom{n}{p}$; formule du binôme de Newton ;

Triangle de Pascal.
Relation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

– p-listes d'un ensemble à n éléments, occurrences d'un élément dans une p-liste ;
– p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments, permutations d'un ensemble à n éléments.

On pourra utiliser la représentation arborescente d'un ensemble de p-listes dans les problèmes de dénombrement.

3) Nombres complexes, polynômes

Rappel des propriétés fondamentales de $\mathbf{C}$.

La construction de $\mathbf{C}$ est hors programme.
L'étude de $\mathbf{C}$ est l'occasion d'une brève révision de la trigonométrie.

Notation exponentielle, formules d'Euler et de Moivre. Racines n-ièmes de l'unité.

Formules d'addition et de duplication, emploi de $e^{i\theta}$.

Ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ (où $\mathbf{K}$ désigne exclusivement $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

La construction des polynômes formels n'est pas au programme ; on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales.

Opérations algébriques, degré.
Division euclidienne.

Par convention $\deg(0) = -\infty$.
Multiples et diviseurs.

Racines, ordre de multiplicité d'une racine. | Cas du trinôme.

Théorème de d'Alembert-Gauss. | Résultat admis.
Exemples simples de factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$. Les méthodes devront être indiquées.

II – Algèbre linéaire

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$*, où* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*.*

Les notions d'algèbre et de groupe sont hors programme.

L'objet de ce chapitre est de mettre en place l'outil vectoriel et l'outil matriciel. Il convient de mener conjointement l'étude des applications linéaires et celle des matrices, et de mettre en valeur les interactions entre ces deux aspects.

1) Espaces vectoriels et applications linéaires

a) Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.

Structure d'espace vectoriel.
Sous-espaces vectoriels.

Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbf{K}^n$, espaces de polynômes) et de l'analyse (espaces de suites, de fonctions).

Combinaisons linéaires.
Sous-espace engendré.

On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.

Familles libres, familles génératrices, bases.

Base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Somme de sous-espaces, somme directe de deux sous-espaces, sous-espaces supplémentaires.

b) Applications linéaires.

Noyau et image d'une application linéaire.

Cas des projecteurs et des symétries.

Isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
Composée de deux applications linéaires.
Isomorphisme réciproque d'un isomorphisme.
Espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
Espace vectoriel $L(E)$ des endomorphismes de E.
Ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E.

2) Espaces vectoriels de dimension finie

Espaces admettant une famille génératrice finie.
Existence de bases.
Si L est libre et si G est génératrice, le nombre d'éléments de L est inférieur ou égal au nombre d'éléments de G.
Dimension d'un espace vectoriel.
Théorème de la base incomplète.

Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
Dans un espace de dimension n, une famille libre (resp génératrice) formée de n vecteurs est une base.

Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Droites, plans et hyperplans vectoriels.

Existence et dimension d'un supplémentaire.

Si F et G sont supplémentaires,
$$\dim F + \dim G = \dim E$$

Rang d'un famille finie de vecteurs, rang d'une application linéaire.

Formule du rang : étant donnés des espaces vectoriels E et F et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u)$.

Application à la caractérisation des isomorphismes. Formes linéaires et hyperplans.

3) Matrices et calcul matriciel

Espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$.
Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base. Matrices colonnes.

Matrice d'une application linéaire dans des bases.

Isomorphisme avec $L(E, F)$.
Matrices lignes et formes linéaires.

Produit d'une matrice et d'une matrice colonne.

Lien avec l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Produit matriciel.

Lien avec la composition des applications linéaires.
Formule du binôme lorsque $AB = BA$.

Rang d'une matrice.

Égalité des rangs d'une application linéaire et de sa matrice dans des bases.

Matrices inversibles, inverse d'une matrice.
Ensemble $GL_n(\mathbf{K})$. Inverse d'un produit.

Lien avec les isomorphismes et avec $GL(E)$.
Caractérisation des matrices triangulaires inversibles.

Calcul de l'inverse d'une matrice.

On présentera, sur des exemples, différentes méthodes. Inversion des matrices $(2, 2)$.

Transposée d'une matrice, matrices symétriques.

Transposition d'un produit, de l'inverse.

4) Systèmes linéaires

Définition des systèmes linéaires.
Écriture matricielle d'un système linéaire.

Système homogène.

Lien avec les noyaux.

Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
Système de Cramer.

Résolution par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples.
On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes :
$$L_i \leftarrow L_i + aL_j \ , \ L_i \leftarrow aL_i \ (a \neq 0), \ L_j \leftrightarrow L_i$$
Exemples de problèmes se ramenant à la résolution de systèmes linéaires.

5) Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

Il s'agit de familiariser les élèves avec la notion de valeur propre et de vecteur propre d'un endomorphisme.

Les notions seront clairement définies mais les exemples proposés seront simples.

a) Réduction des endomorphismes

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme de E.

Endomorphisme diagonalisable.

Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres.

b) Réduction des matrices carrées

Matrice d'un endomorphisme dans une base.
Changement de base, matrice de passage.

Formules de changement de base.
Matrices semblables.

$X = PX', \quad A' = P^{-1}AP$

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée.
Matrices diagonalisables, diagonalisation d'une matrice carrée.

III – Nombres réels - Suites et séries

1) R et la convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux

Dans la continuité des programmes de terminale, il est conseillé de faire appel à des procédés constructifs tels ceux utilisant les suites adjacentes et la dichotomie.

Aucune démonstration concernant les résultats de ce paragraphe n'est exigible des candidats.

Limite d'une suite, suites convergentes.
On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les n, sauf un nombre fini.

On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.
Aucune compétence concernant les quantificateurs n'est exigible.

Unicité de la limite.
Opérations algébriques sur les suites convergentes, compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Suites monotones, suites adjacentes.

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.
Toute partie non vide et majorée de **R** admet un plus petit majorant.
Borne supérieure (resp inférieure) d'un ensemble non vide majoré (resp minoré.)

Ce résultat, admis, sera pris comme caractérisation de **R**.
Construction de suites adjacentes par dichotomie.
Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Théorème de limite monotone : toute suite croissante majorée converge.

Partie entière d'un réel.

Notation $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{Ent}(x)$.

Suite tendant vers $+\infty$, vers $-\infty$.
Notation $\overline{\mathbf{R}}$. Limite d'une suite dans $\overline{\mathbf{R}}$.
Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I admettant une limite b en un point a, et si (u_n) est une suite d'éléments de I tendant vers a, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers b.

a et b dans $\overline{\mathbf{R}}$.

2) Exemples de suites

Les candidats doivent connaître les formules donnant : $\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=1}^{n} k^2, \sum_{k=1}^{n} k^3, \sum_{k=0}^{n} q^k$.

Suites arithmético-géométriques :
$u_{n+1} = au_n + b$, $a \neq 0$.

On se ramènera à des suites géométriques.

Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 :

$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Equation caractéristique.
On pourra, dans ce cas et uniquement dans ce cas, être amené à utiliser des suites complexes mais on ne soulèvera aucune difficulté à ce sujet.

Suites définies par une relation de récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$.

On ne travaillera que sur des exemples.

Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

ℓ est un point fixe de f.
Aucun autre résultat n'est exigible.

3) Etude asymptotique des suites

Suite négligeable devant une autre suite.

Notation $u_n = o(v_n)$

Suites équivalentes.

Notation $u_n \sim v_n$.
$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

Compatibilité de l'équivalence avec le produit et le quotient.

On sensibilisera, à l'aide d'exemples, les étudiants à la notion de vitesse de convergence.

4) Séries numériques

Série de terme général u_n.
Sommes partielles associées.
Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.

On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).

Comparaison des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes, par exemple :
$u = (u + |u|) - |u| = \max(u, 0) - \max(-u, 0))$

Convergence des séries de Riemann.

Formules de sommation des séries géométriques et de leurs dérivées successives.

En vue des probabilités, on pourra démontrer la formule du binôme négatif :

$$\text{Si } |x| < 1, \quad \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Série exponentielle.

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ce résultat pourra être démontré à l'aide de la formule de Taylor.

IV−Fonctions réelles d'une variable réelle - Généralités

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$*. Les candidats doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*

Aucune démonstration n'est exigible des candidats.

1) Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point

Définition de la limite et de la continuité d'une fonction d'une variable en un point.
Unicité de la limite.
Développement limité à l'ordre 0 en un point.
Limites à droite et à gauche.
Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.
Extension de la notion de limite aux cas $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$ et aux cas des limites infinies.
Caractérisation séquentielle de la limite.
Opérations algébriques sur les limites.
Compatibilité avec la relation d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Limite d'une fonction composée.

On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$; ainsi, lorsque x_0 appartient à I, f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.

2) Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point

Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point de $\overline{\mathbf{R}}$.

Notation $f = o(g)$ et règles élémentaires de calcul sur les petits o.

Fonctions équivalentes au voisinage d'un point de $\overline{\mathbf{R}}$.

Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$. $\quad f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$

Compatibilité de l'équivalence avec le produit et le quotient.
Comparaison des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes au voisinage de l'infini, des fonctions puissances et logarithmes en 0.

3) Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

Fonctions paires, impaires, périodiques.
Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.

Théorème de limite monotone : toute fonction monotone sur $]a, b[\subset \overline{\mathbf{R}}$ admet en tout point des limites à droite et à gauche.

Comportement en a et b.

Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition.
Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un segment par une fonction continue.

Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$

Théorème de la bijection.

Tout fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation.

V– Fonctions réelles de deux variables réelles - Généralités

L'objectif est d'initier les élèves aux fonctions de deux variables en privilégiant les aspects géométriques à partir d'un minimum d'outils théoriques. On identifiera $\mathbf{R}^2$ au plan euclidien usuel.

Aucune démonstration n'est exigible des candidats.

1) Rappels sur le plan - Eléments de topologie

Droite $d_{A,U}$ passant par A et de vecteur directeur U.	Paramétrisation : $t \mapsto A + tU,\ t \in \mathbf{R}$
Segment $[A, B]$	$t \mapsto A + t(B - A) = (1 - t)A + tB,\ t \in [0, 1]$
Produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^2$. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme et distance euclidienne.	Simple rappel. Notation $<\ ,\ >$
Boules, ensembles ouverts.	Intersection finie, union d'ouverts.
Ensembles fermés.	Un fermé est le complémentaire dans $\mathbf{R}^2$ d'un ouvert.
Parties bornées, parties convexes de $\mathbf{R}^2$.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

2) Fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$

Graphe d'une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$. Cas des fonctions affines de deux variables.	On se limitera à des exemples simples qu'on pourra illustrer à l'aide de logiciels graphiques. Exemples de courbes de niveau.
Continuité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Opérations sur les fonctions continues. Composition à gauche par une fonction continue d'une variable.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.
Si f est définie et continue sur $\mathbf{R}^2$, l'image réciproque de tout intervalle ouvert (resp fermé) est un ouvert (resp fermé) de $\mathbf{R}^2$.	
Une fonction continue sur une partie fermée bornée est bornée et elle atteint ses bornes.	Résultat admis.

VI– Fonctions réelles d'une variable - Calcul différentiel et intégral

Aucune démonstration n'est exigible des candidats.

1) Dérivation

Dérivée en un point, développement limité à l'ordre 1 et approximation affine au voisinage d'un point.	
Dérivées à gauche et à droite. Opérations algébriques, composition.	
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée.	Notations f' et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
Dérivation des fonctions réciproques.	Définition et dérivation de la fonction Arctan. L'étude de cette fonction se limitera strictement à ces deux points.
Théorème de Rolle.	
Égalité et inégalités des accroissements finis.	Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$. Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ alors $\lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b - a\rvert$.

Caractérisation des fonctions constantes, des fonctions monotones dérivables.
Si $f' > 0$ sur I, f est strictement croissante sur I.

2) Dérivées successives

Fonction p fois dérivable en un point.
Fonctions de classe D^p, de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle.
Opérations algébriques, formule de Leibniz.
Théorème de composition.

3) Fonctions convexes

Définition des fonctions convexes.
Fonctions concaves, points d'inflexion.

Les élèves devront savoir que si f est de classe C^1 les propositions suivantes sont équivalentes :
f' est croissante ;
C_f est au-dessus des tangentes ;
C_f est au-dessous des cordes.

Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2.

4) Intégration sur un segment

a) Intégrale des fonctions positives.

Intégrale des fonctions en escalier positives.

Intégrale des fonctions continues positives.

On admettra que la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant f est égale à la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant f.

Notation $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Interprétation en terme d'aire, de valeur moyenne et de sommation.

b) Intégrale des fonctions continues.

Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance.

Si f est continue sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$,
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt \leqslant (b-a)\max_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

Sommes de Riemann.

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Intégrale des fonctions continues par morceaux.

c) Intégrale fonction de sa borne supérieure - Primitivation et intégration.

Primitive d'une fonction sur un intervalle.
Si f est continue sur un intervalle I, l'application $x \in I \ \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en $a \in I$.

Équation différentielle $f'(x) = f(x)g(x)$.

Les solutions sont de la forme $f(x) = K\exp(G(x))$ où G est une primitive de g, $K \in \mathbf{R}$.

Prolongement des fonctions de classe C^p.

Si f est de classe C^p sur $[a,b[$ et si $f^{(p)}$ admet une limite finie en b, alors f admet un prolongement de classe C^p sur $[a,b]$.

Intégration par parties.

Changement de variable.

Les changements de variable non affines devront être indiqués.

5) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Égalité et inégalité de Taylor-Lagrange.

Ces formules seront données à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1}.

Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^n.

6) Développements limités.

Définition.
Somme, produit et composition de développements limités.

La recherche de développements limités est un outil pour l'étude locale des fonctions ; elle ne constitue pas une fin en soi, et on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine.

Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, binôme, sinus et cosinus).

L'étude du comportement asymptotique de certaines fonctions peut mettre en jeu des développements de type plus général ; on se limitera à des exemples simples, et les indications nécessaires seront fournies. L'étude générale des développements asymptotiques est hors programme.

VII – Fonctions de deux variables - Calcul différentiel

Dérivées partielles en un point.

Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$

Approximation locale par une fonction affine.
Développement limité d'ordre 1 en un point d'une fonction de deux variables.

On fera le rapprochement avec les fonctions d'une variable.

Gradient en A.

Notation $\nabla f(A)$ ou ∇f_A

Fonctions de classe C^1 sur un ouvert.

Existence d'un développement limité d'ordre 1 en tout point pour une fonction de classe C^1 sur un ouvert.

Résultat admis.
$$f(A+H) = f(A) + < \nabla f_A, H > + o(\|H\|)$$
Plan tangent.

Dérivée d'une fonction de la forme $t \mapsto f(u(t), v(t))$
Cas particulier de $t \mapsto f(A+tU)$ avec U unitaire.

Dérivées directionnelles en A.

0n montrera que la dérivée dans la direction U est $< \nabla f_A, U >$.

Interprétation du gradient en terme de variation de la fonction.

Gradient et courbes de niveau.

VIII – Statistique descriptive

La plupart de ces notions ont été étudiées dans les classes antérieures. Il s'agit à ce niveau de préciser le vocabulaire, de rappeler quelques techniques de description statistique, de montrer sur des exemples et en liaison avec les autres disciplines, l'intérêt et les limites des résumés statistiques introduits.

Notions de population et d'individus, d'échantillon observé.

Un échantillon est une liste d'individus de la population. Si l'échantillon est la liste exhaustive de tous les individus, on l'identifie à la population.

Caractère. Caractère qualitatif, quantitatif. Série statistique associée à un échantillon.	Un caractère est encore appelé variable ou variable statistique.
Description d'une série statistique : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.	
Représentations graphiques.	Diagrammes en bâtons, histogrammes.
Caractéristiques de position (moyenne, médiane, modes(s)).	On notera bien que les paramètres empiriques sont calculés à partir de l'échantillon observé.
Caractéristiques de dispersion (variance et écart-type empiriques, quartiles, déciles).	

IX – Probabilités

L'objectif est de mettre en place un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.

C'est pourquoi le vocabulaire général des probabilités est adopté (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *), mais aucune difficulté ne sera soulevée sur ce cadre.*

Les notions devront être introduites de façon progressive et motivée, en rapport avec les situations étudiées.

Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts de base, en ne faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques de base.

On étendra les notions au cas infini à partir de situations simples telles une suite infinie de Pile ou Face et en liaison avec l'étude de procédés de sommation plus élaborés.

1) Espaces probabilisés

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire. Univers des résultats observables, événements, événements élémentaires. Opérations sur les événements, événements incompatibles.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples. On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.
Algèbre d'événements. Algèbre engendrée par une famille d'événements.	
Tribu ou σ-algèbre d'événements.	On pourra, dans le cas infini, montrer l'insuffisance de la notion d'algèbre et donner quelques exemples significatifs d'événements de la forme : $$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \quad \text{et} \quad A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$
σ-algèbre engendrée par une famille d'événements.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur ce point.
Système complet d'événements.	σ-algèbre engendrée par un système complet.
Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.	

b) Probabilité

Une probabilité est une application σ-additive P définie sur une σ-algèbre, vérifiant $P(\Omega) = 1$. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.	Si Ω est fini, on prendra le plus souvent $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Cas de l'équiprobabilité. Les hypothèses probabilistes portant sur une famille d'événements doivent permettent de définir une probabilité sur la tribu engendrée.

Propriétés de limite monotone :
– pour toute suite croissante (A_n) d'événements,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

– pour toute suite décroissante (A_n) d'événements,

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

0n déduira de la propriété de limite monotone que pour toute suite (A_n) d'événements,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Ensemble négligeable, propriété vraie presque sûrement.
Formule de Poincaré ou du crible.

Notation ps. Ces propriétés dépendent de P.

Probabilité conditionnelle.
Si $P(A) \neq 0$, $P(A\cap B) = P(A)P_A(B)$.

Notation P_A. $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

Formule des probabilités composées.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales.
Formule de Bayes.

On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

Indépendance en probabilité de deux événements.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

σ-algèbres indépendantes.

On admettra que si les (A_i) sont indépendants des (B_j), les σ-algèbres engendrées le sont aussi.

Indépendance mutuelle de n événements.
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

Modélisation de situations aléatoires, construction de lois de probabilité.

Les candidats devront savoir mettre en évidence les hypothèses servant à construire les modèles utilisés. Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

2) Variables aléatoires réelles discrètes

Il est recommandé d'introduire la notion de variable aléatoire d'abord dans le cas des univers finis.

Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Variables dicrètes finies, variables discrètes infinies.

L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie de **N** ou **Z**.
On adoptera les notations habituelles telles que $[X = x], [X \leqslant x]$ etc.

Système complet et σ-algèbre associés à une variable aléatoire discrète.

La tribu $\mathcal{A}_X$ des événements liés à X est la tribu engendrée par le système complet $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans certains cas (temps d'attente...), on pourra être conduit à parler de variables à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, presque sûrement à valeurs réelles.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X : $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète à l'aide de sa fonction de répartition.

Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$.

On remarquera que $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}_X$.
On se limitera à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...

Espérance d'une variable aléatoire discrète.

Si Ω fini et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.
Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si la série $\sum_i x_i P[X = x_i]$ est absolument convergente.

On admettra qu'on ne modifie ni la nature ni la somme d'une série absolument convergente en modifiant l'ordre de ses termes et on pourra adopter la notation $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP[X = x]$.

Théorème de transfert : on admet que, sous réserve de convergence absolue,

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i)P[X = x_i].$$

Notation $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)p[X = x]$.

Moment et moment centré d'ordre r ($r \in \mathbf{N}$).

$m_r(X) = E(X^r)$, $\mu_r(X) = E\big((X - E(X))^r\big)$
(Sous réserve d'existence)

Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète.
Calcul de la variance.
Variables centrées, centrées réduites.

Formule de Huygens : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$
$V(aX + b) = a^2V(X)$.

Inégalité de Bienaymé - Tchebychev.

Cette inégalité confirme l'intérêt de l'écart-type comme mesure de la dispersion.

3) Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Système complet et σ-algèbre $\mathcal{A}_{(X,Y)}$ associés au couple (X, Y).
Loi d'un couple, lois marginales, lois conditionnelles.
Indépendance de deux variables discrètes.

On remarquera que $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ sont contenues dans $\mathcal{A}_{(X,Y)}$.

Loi d'une variable $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).

On remarquera que $\mathcal{A}_Z \subset \mathcal{A}_{(X,Y)}$.
On se limitera à des cas simples tels que $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, $X + Y$.

Espérance de $Z = g(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont des variables discrètes finies.

$E(Z) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y]))$.
Si Ω est fini et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors
$E(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega), Y(\omega))p(\{\omega\})$.

Linéarité et croissance de espérance.

Résultat immédiat quand Ω est fini et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
On le démontrera pour les variables discrètes finies.
Le cas général sera étudié en seconde année.

Covariance de deux variables discrètes finies.

Variance de la somme de deux variables discrètes finies. Cas de l'indépendance.

Indépendance mutuelle d'une suite finie ou infinie de variables aléatoires réelles discrètes.

Variance de la somme de n variables réelles discrètes finies mutuellement indépendantes.

4) Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi de Bernoulli, espérance et variance.

Variable indicatrice d'un événement ou variable de Bernoulli.

Loi des tirages avec remise ou loi binomiale, espérance et variance.

Loi hypergéométrique ou des tirages sans remise, espérance.

On effectuera le calcul de la variance mais le résultat n'est pas exigible.
La loi hypergéométrique pourra être l'occasion de manipuler des variables de Bernoulli dépendantes.

Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, espérance, variance.

Application, à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, où $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$.

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique ou loi du temps d'attente d'un premier succès dans un processus sans mémoire.
Espérance et variance.

La propriété caractéristique de la loi géométrique, temps d'attente discret, sera mise en évidence. Si cet événement a pour probabilité p, alors pour tout nombre entier naturel non nul k,

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Loi de Poisson : définition, espérance, variance.

4) Convergence et approximations

a) Loi faible des grands nombres pour une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

La loi faible des grands nombres permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un événement, introduite intuitivement.

b) Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale.
Approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p/n)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$.

On justifiera ces approximations.
Toutes indications devront être fournies aux candidats quant aux critères précis d'approximation.
On pourra, par des calculs, ou par des simulations informatiques, introduire la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ comme loi limite d'une suite de variables suivant la loi binomiale $B(n, \lambda/n)$.

X – Éléments d'algorithmique

L'objectif est d'initier les étudiants à l'algorithmique au travers de thèmes empruntés au programme de mathématiques. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec les outils informatiques, le recours à un algorithme est une démarche rendue naturelle et nécessaire grâce à la puissance et à la souplesse des nombreux outils logiciels disponibles.
Le langage retenu pour la programmation est un sous-ensemble du langage PASCAL, langage conçu dès son origine comme un outil d'enseignement et permettant une adaptation rapide à tous les environnements récents de programmation.
La mise en œuvre sur machine des algorithmes étudiés se fait dans le cadre horaire prévu (horaire d'interrogation orale), mais les études des algorithmes se font en continuité totale avec le cours de mathématiques.
Seules les notions de Pascal indiquées dans le programme sont exigibles.

1) L'environnement Pascal

Les étudiants devront savoir utiliser l'environnement de programmation Pascal : créer, modifier, sauvegarder et rappeler un fichier programme, le compiler et l'exécuter en mémoire.
Les seuls éléments exigibles du langage Pascal sont les suivants :

a) Variables et types
Les étudiants devront maîtriser la notion de variable au sens informatique (différence avec la notion mathématique), la notion de type et connaître les types suivants : `integer, real, boolean, array`.

b) Opérations élémentaires
Les opérations suivantes doivent être connues des étudiants :
Affectation (`:=`), conditions d'utilisation.
Comparaison (`= , > , < , >= , <= , <>`).
Opérations arithmétiques (`+ , - , * , /`).
Opérations booléennes (`and , or , not`).

Pour commencer à évaluer les performances des algorithmes, on habituera les étudiants à dénombrer les opérations élémentaires mises en œuvre dans l'exécution d'un programme (ou d'une fonction ou d'une procédure).

c) Opérations et fonctions usuelles
Doivent être connus des étudiants :
la division entière (`div`), le reste entier (`mod`) et les fonctions usuelles (`ln, exp, trunc, abs, sqrt, sin, cos`).

d) Structures de base
En plus de la connaissance de la structure générale d'un programme, les structures suivantes seront utilisées :
Structure séquentielle : instructions simples, instructions composées (`begin ...end`).
Structure conditionnelle : `if ...then ...[ else ...]`.
Structures répétitives : `for ...to ...do ...`, `for ...downto ...do ...`, `while ...do ...` `repeat ...until ...`.

e) Procédures et fonctions
Déclaration de procédures et de fonctions, structure, passage de paramètres en valeur et en variable.
Notion de variables locales et globales.
Les procédures d'entrée-sortie pour le clavier et l'écran sont `readln, write, writeln`.

2) Listes de savoir-faire exigibles en première année :

Calculs de sommes et de produits.

Exemples : $\sum_{k=1}^{n} k^4$, $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{365}\right)$, $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{(i+j)}$

Calcul des termes d'une suite récurrente.

On utilisera des suites récurrentes sur une ou plusieurs générations.

Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite.

On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique.

Calculs de valeurs approchées de la somme d'une série.

La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.
Mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, ...).

Écriture et utilisation de fonctions servant pour des dénombrements classiques : n^p, $n!$, $\binom{n}{p}$.

Calcul de la valeur d'un polynôme de haut degré. Principe et mise en œuvre de l'algorithme de Hörner. Comparaison de l'efficacité de cet algorithme à ceux utilisant la puissance.

Utilisation du générateur aléatoire `random`, `random(n)` et de l'instruction `randomize` pour simuler des phénomènes aléatoires.
Écriture de fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$, une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi binomiale de paramètres n et p.

On montrera sur ces exemples le danger de l'utilisation de données de type `integer` (risque de débordement de l'intervalle de validité).

Exemples : $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ ou $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
On écrira des fonctions PASCAL dont l'intitulé sera du type :

```
function eval_S(n :integer ;x :real) :real ;
```

On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ (n grand) avec la loi de Poisson.