Corrigé du devoir Libre n° 1

Partie I. *Alice au pays des merveilles*

Nous noterons R (resp. J, B) l'assertion : " le flacon rouge (resp. jaune, bleu) contient un poison". Nous noterons I_R (resp.I_J, I_B) l'inscription notée sur le flacon rouge (resp.jaune, bleu).

***Question* I-1.** $I_R \iff J\ et\ Non(B)$, $I_J \iff \big(R \Rightarrow B\big)$, $I_B \iff Non(B)\ et\ (R\ ou\ J)$
Dans un souci d'économie de papier, je dresse une seule table de vérité, complète :

	R	J	B	I_R	I_J	I_B	$(I_R et I_J) \Rightarrow I_B$	$(I_B et I_R \Rightarrow I_J$	$(I_J et I_B \Rightarrow I_R$
1	V	V	V	F	V	F	V	V	V
2	V	V	F	V	F	V	V	F	V
3	V	F	V	F	V	F	V	V	V
4	V	F	F	F	F	V	V	V	V
5	F	V	V	F	V	F	V	V	V
6	F	V	F	V	V	V	V	V	V
7	F	F	V	F	V	F	V	V	V
8	F	F	F	F	V	F	V	V	V

***Question* I-2.** La question se traduit par I_R et I_J et I_B. Les inscriptions sont compatibles (regardez la ligne 6).

***Question* I-3.** La question se traduit par $(I_R et I_J) \Rightarrow I_B$ ou $(I_R et I_B) \Rightarrow I_J$, ou $(I_B et I_J) \Rightarrow I_R$.
D'après la table de vérité ci-dessus, les implications$(I_R et I_J) \Rightarrow I_B$ et $(I_B et I_J) \Rightarrow I_R$ sont vraies, tandis que l'implication $(I_R et I_B) \Rightarrow I_J$ est fausse.

***Question* I-4.** Oui, il suffit de lire la ligne 8 : I_R et I_B sont fausses.

***Question* I-5.** D'après la ligne 6, lorsque les trois inscriptions sont vraies, alors J est vrai.

***Question* I-6.** On suppose dans cette question que $\forall X \in \{J, R, B\}, I_X \Rightarrow Non(X)$. Par conséquent seules les lignes 3,4,7 et 8 de la table de vérité comptent. On observe alors que dans chacune de ces lignes J est faux, c'est-à-dire le flacon jaune ne contient pas de poison.

Partie II. *Images directes et images réciproques*

Exercice II-1. *Propriétés de l'image directe*

Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ et $f : E \to F$ une application. Montrons que

II.1-1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$ il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subset B$ d'où $x \in B$. Comme $y = f(x)$, ceci prouve que $y \in f(B)$.

II.1-2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in E$

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B | y = f(x) \iff \exists x \in A | y = f(x) \text{ ou } \exists x \in B | y = f(x) \\ &\iff y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \iff y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

▲

II.1-3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ceci résulte de la Question II.1-1 :

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{array}\right. \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

▲

II.1-4. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *si et seulement si* f est injective.
Supposons f injective et montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$: soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Comme $y \in f(A)$, il existe $a \in A$ tq $y = f(a)$; comme $y \in f(B)$, il existe $b \in B$ tq $y = f(b)$. Aisnsi, $y = f(a) = f(b)$. Comme f est injective par hypothèse, ceci entraîne que $a = b$. Par conséquent $a \in A \cap B$. Comme $yy = f(a)$, il en résulte que

$y \in f(A \cap B)$.
Réciproquement Soit $a, b \in E$ tel que $f(a) = f(b)$, montrons par l'absurde que $a = b$. Supposons au contraire que $a \neq b$. Notons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Nous savons que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = \{f(a)\}$. Comme de plus $A \cap B = \emptyset$, il vient $\begin{cases} f(A \cap B) = \emptyset \\ f(A \cap B) = \{f(a)\} \end{cases}$. Ce qui contredit le fait que f est une application. ▲

Exercice II-2. *Propriétés de l'image réciproque*

Soient $C, D, \in \mathscr{P}(F)$ et $f : E \to F$ une application. Montrons que

II.2-1. $C \subset D \Rightarrow \bar{f}^{1}(C) \subset \bar{f}^{1}(D)$.
Soit $x \in \bar{f}^{1}(C)$, alors $f(x) \in C$. Or $C \subset D$, donc $f(x) \in D$, c-à-d $x \in \bar{f}^{1}(D)$. ▲

II.2-2. $f^{1}(C \cup D) = f^{1}(C) \cup f^{1}(D)$.
La preuve sera par double-inclusion :
Tout d'abord, d'après la Question précédente, nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} C \subset C \cup D \\ D \subset C \cup D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{f}^{1}(C) \subset \bar{f}^{1}(C \cup D) \\ \bar{f}^{1}(D) \subset \bar{f}^{1}(C \cup D). \end{array}\right\} \Rightarrow f^{1}(C) \cup f^{1}(D) \subset f^{1}(C \cup D).$$

Réciproquement si $x \in f^{1}(C \cup D)$, alors $f(x) \in C \cup D$. Deux cas se présentent :
si $f(x) \in C$ alors $x \in f^{1}(C) \subset f^{1}(C) \cup f^{1}(D)$,
si $f(x) \in D$ alors $x \in f^{1}(D) \subset f^{1}(C) \cup f^{1}(D)$.
Dans tous les cas, $x \in f^{1}(C) \cup f^{1}(D)$. ▲

II.2-3. $f^{1}(C \cap D) = f^{1}(C) \cap f^{1}(D)$.
La preuve sera par double-inclusion :
Tout d'abord d'après II.2-1, nous avons
$C \cap D \subset C \Rightarrow f^{1}(C \cap D) \subset f^{1}(C)$ et $C \cap D \subset D \Rightarrow f^{1}(C \cap D) \subset f^{1}(D)$.
Par conséquent $f^{1}(C \cap D) \subset f^{1}(C) \cap f^{1}(D)$.
Réciproquement, soit $x \in f^{1}(C) \cap f^{1}(D)$. Alors $f(x) \in C$ et $f(x) \in D$, d'où $f(x) \in C \cap D$, c-à-d $x \in f^{1}(C \cap D)$. ▲

Exercice II-3. *Une caractérisation de la surjectivité*

II.3-1. Montrons que pour toute partie D de F , $f\left(\bar{f}^{1}(D)\right) \subset D$.
Soit $D \in \mathscr{P}(F)$ soit $y \in \left(\bar{f}^{1}(D)\right)$, alors il existe $x \in \bar{f}^{1}(D)$, tel que $y = f(x)$. Précisément, comme $x \in \bar{f}^{1}(D)$, $y = f(x) \in D$. ▲

II.3-2. Montrons que
f est surjective *si et seulement si* pour toute partie D de E , $f\left(\bar{f}^{1}(D)\right) = D$.
Supposons que f est surjective et montrons que $\forall D \in \mathscr{P}(F)$, $D \subset f\left(\bar{f}^{1}(D)\right)$.
Soit $D \in \mathscr{P}(F)$ et $y \in D$ fixés. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) \in D$, x appartient à $\bar{f}^{1}(D)$. Comme $y = f(x)$, $y \in f\left(\bar{f}^{1}(D)\right)$.
Réciproquement, supposons que $\forall D \in \mathscr{P}(F)$, $f\left(\bar{f}^{1}(D)\right) = D$ et montrons que f est surjective.
Appliquons notre hypothèse avec $D = F$, il vient $F = f\left(\bar{f}^{1}(F)\right) \subset f(E)$. Par conséquent $f(E) = F$, c'est-à-dire que f est surjective. ▲

Exercice II-4. *Une caractérisation de l'injectivité*

II.4-1. Montrons que pour toute partie A de E , $A \subset \bar{f}^{1}(f(A))$.
Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, et fixons $x \in A$. Comme $x \in A$, il est clair que $f(x) \in f(A)$. D'où $x \in \bar{f}^{1}(f(A))$. ▲

II.4-2. Montrons que f est injective *si et seulement si* pour toute partie A de E , $A = \bar{f}^{1}(f(A))$.
Supposons f injective et considérons une partie A de E. Montrons que $\bar{f}^{1}(f(A)) \subset A$. Soit donc $x \in \bar{f}^{1}(f(A))$, et notons $y = f(x)$. Il est clair que $y \in f(A)$. Par conséquent , il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Ainsi, $y = f(x) = f(a)$. Comme par hypothèse f est injective, il en résulte que $x = a \in A$.
Réciproquement, supposons que pour toute partie A de E , $A = \bar{f}^{1}(f(A))$ et montrons que f est injective.
Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Notons $A = \{x\}$. Comme $f(x) = f(x')$, nous obtenons d'une part que $x' \in \bar{f}^{1}(f(A))$. D'autre part , comme $A = \bar{f}^{1}(f(A))$, nous en déduisons que $x' \in A$, ie $x = x'$. ▲

Partie III. *Un exercice indépendant*

Notation : *Soit $y \in F$, on note $f_y : E \to F$ la fonction constante égale à y, i.e. $\forall x \in E, f_y(x) = y$.*

On considère trois ensembles E, F et G, ainsi qu'une application $\varphi : F \to G$. Notons Φ l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} F^E & \to & G^E \\ f & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}.$$

III.0-1. Montrons que Φ est *injective si et seulement si* φ est *injective.*

Supposons que Φ est injective et montrons que φ l'est aussi. Donnons-nous deux éléments y, y' de F tels que $\varphi(y) = \varphi(y')$. Par construction de f_y et $f_{y'}$, nous avons pour tout élément x de E $\varphi(f_y(x)) = \varphi(f_{y'}(x))$, c'est-à-dire que $\Phi(f_y) = \Phi(f_{y'})$. Comme Φ est injective, il en résulte que $f_y = f_{y'}$ et par suite que $y = y'$.

Réciproquement supposons que φ est injective et montrons que Φ est injective. Soit donc $f, f' \in F^E$ telle[1] que $\Phi(f) = \Phi(f')$, Soit $x \in E$ arbitraire, il découle de l'égalité $\Phi(f) = \Phi(f')$ que $\varphi(f(x)) = \varphi(f'(x))$. Comme par hypothèse φ est injective, il s'en suit que $f(x) = f'(x)$. Ceci étant vrai pour tout x arbitraire, il en résulte que $f = f'$. ▲

III.0-2. Montrons que Φ est *surjective si et seulement si* φ est *surjective.*

Supposons Φ surjective et montrons que φ est surjective. Soit $z \in G$ arbitraire. On considère la fonction $g : E \to G$ constante égale à z, i.e. $\forall x \in E$, $g(x) = z$. Comme par hypothèse Φ est surjective, il existe une fonction $f : E \to F$ telle que $\Phi(f) = g$.

Soit $x \in E$ fixé, il vient $\varphi \circ f(x) = z$. Posons $y = f(x)$, on a alors $\varphi(y) = z$.

Réciproquement, supposons φ surjective et montrons que Φ est surjective.

Soit $g : E \to G$ une application. Soit $x \in E$ fixé. Notons $z = g(x) \in G$. Comme φ est surjective, $\bar{\varphi}^{1}(\{z\} \neq \emptyset$. Choisissons un antécédent $y \in \bar{\varphi}^{1}(\{z\}$ de z par φ.

Ainsi, pour tout élément x de E nous avons construit **un** antécédent $y \in F$ de $g(x)$ par φ. Comme cet antécédent dépend de x, notons-le $f(x)$. Le procédé ainsi décrit définit une application $f : E \to F$ telle que $\forall x \in E$ $f(x)$ est un antécédent de $g(x)$ par φ, c'est-à-dire $\varphi \circ f(x) = g(x)$. La fonction $fE \to F$ vérifie bien $\Phi(f) = g$ ▲

[1] rien à voir avec la dérivée ici !