Corrigé du Devoir Libre n° 10

Partie I. Séries numériques

1. **Théorème de Pringsheim**
On se propose de démontrer le

Théorème.— Soit (u_n) une suite positive et décroissante.

$$\boxed{\textbf{Si } \text{la série de terme général converge, } \textbf{alors } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Dans le suite de cette question, u_n désigne une suite décroissante et positive de nombre réels, telle que $\sum u_n$ converge.

a. Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de rang n.

i. Por tout entier $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n = \sum_{n+1}^{2n} u_k \geq n\, u_{2n}$ par décroissance de la suite u. ▲

ii. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2nu_{2n} \leq 2\left(S_{2n} - S_n\right)$. Comme par hypothèse, la série $\sum u_n$ converge, il en résulte que la suite (S_n) est convergente. La suite $(S_{2n}$ étant extraite de la précédnte, il s'en suit que $S_{2n} - S_n$ est convergente de limite nulle. Il suffit dès lors d'invoquer le théorème de convergence par encadrement pour affirmer que $2nu_{2n}$ est convergente de limite nulle. ▲

b. En remarquant que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (2n+1)\, u_{2n+1} \leq (2n+1)\, u_{2n} = 2n\, u_{2n} + u_{2n}$ par monotonie de u, il découle de la question précédente et du fait que (u_{2n}) étant extraite de u que $(2n+1)\, u_{2n+1}$ est encadrée par deux suites convergentes de limite 0. On conclut *once again* par le théorème de coonvergence par encadrement. ▲

c. Ainsi les suites extraites de $(n\, u_n)$ formées des termes de rangs pairs et impairs sont toutes deux convergentes de limite 0. Par complémentairté, il en résulte que la suite $(n\, u_n)$ est elle-même convergente de limite nulle. Autrement dit $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ce qui achève la démonstration du théorème de Pringsheim. ▲

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle strictement positive et bornée. On suppose que la série de terme général u_n est divergente. Dans cette question on définit pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, la somme partielle de rang n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$$

a. Comme la suite u est positive (S_n) est croissante. Comme la série de terme général u_n est divergente, (S_n) est divergente. D'après le théorème de convergence pour les suites croissantes, j'en déduis que (S_n) est divergente vers $+\infty$.
D'autre part, par hypothèse la suite u est bornée : il existe donc un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \leq M$.
D'où je tire l'estimation –valide pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leq v_n \leq \frac{M}{S_n}$$

Comme d'après la question précédente, la suite (S_n) est divergente vers $+\infty$, j'en déduis par opérations algébriques puis encadrement que la suite (v_n) est convergente de limite 0. ▲

b. On pose pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = \ln(1 + v_n)$.
Soit n un entier naturel non nul , par définition de v_n et w_n, on a : $\ln\left(\dfrac{S_{n+1}}{S_n}\right) = \ln\left(\dfrac{S_n + u_{n+1}}{S_n}\right) = \ln(1 + v_n) = w_n$.
D'autre part, par *téléscopage*, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} w_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln S_{n+1} - \ln S_n) = \ln S_{n+1} - \ln S_1$$

Par hypothèse la suite (S_n) est divergente vers $+\infty$. Par conséquent la somme de partielle de rang n de la série de terme général w_n est équivalente à $\ln S_{n+1}$ qui diverge vers $+\infty$. Donc $\sum w_n$ diverge. ▲

c. Comme d'après la question **2.a** (v_n) est convergente vers 0, je déduis de l'égalité $w_n = \ln(1+v_n)$ que

$$w_n \sim v_n$$

Par suite, les séries $\sum w_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Ainsi, $\sum v_n$ diverge. ▲

d. **Application :** Soit u la suite constante égale à 1. Alors u est bornée et la somme partielle de rang n vaut $S_n = n$. Par conséquent la série $\sum u_n$ est divergente et le résultat de la question précédente s'applique : la série de terme général $v_n = \frac{1}{S_n} = \frac{1}{n}$ diverge. ▲

3. Séries de Bertrand

Dans cette dernière question on s'intéresse aux séries de Bertand.

Définition : *On appelle **série de Bertrand** toute série $\sum_{n\geq 2} u_n$ de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

a. **le cas** $\alpha = 1$

i. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 2$ par $u_n = 1/n$. La somme partielle de rang n vérifie $S_n \sim \ln n$. J'en déduis que

$$\frac{u_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{(n+1)\ S_n} \sim \frac{1}{n\ \ln n}$$

Par conséquent les séries –à termes positifs– de termes généraux $\frac{1}{n\ \ln n}$ et $\frac{u_{n+1}}{S_n}$ sont de même nature. Or, comme la suite u est clairement bornée par 1 et la série harmonique de terme général u_n est divrergente, le résultat de la question **2.** permet d'affirmer que la série de terme général $\frac{u_{n+1}}{S_n}$ est divergente.

En conclusion, la série de terme général $\frac{1}{n\ \ln n}$ diverge. ▲

ii. D'après le théorème de Pringsheim si (u_n) est une suite de nombre réels décroissante de limite nulle, alors

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n = o(1/n)$$

La réciproque est fausse puisque la suite $u_n = \frac{1}{n\ \ln n}$ est décroissante convergente de limite 0, vérifie de plus $u_n = o(1/n)$ mais pourtant la série de terme général u_n est divergente. ▲

iii.

- supposons que $\beta \leq 1$ alors pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n\,(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n\ \ln n} \geq 0$. Par comparaison il s'en suit que la série de terme général $\frac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ diverge.
- supposons que $\beta > 1$. La suite $u_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ est décroissante. D'après le **Théorème 15.15** du cours, les séries de termes généraux u_n et $2^k\, u_{2^k}$ sont de même nature. Or pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire

$$2^k\ u_{2^k} = \frac{2^k}{2^k\,\big(\ln(2^k)\big)^\beta} = \frac{1}{\big(k\ \ln 2\big)^\beta} = \frac{1}{(\ln 2)^\beta}\ \frac{1}{k^\beta}$$

Comme par hypothèse, $\beta > 1$, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^\beta}$ est convergente.

Ainsi, la série de terme général $\frac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ converge.

En conclusion, nous avons démontré que :

La série de terme général $\frac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ converge *si et seulement si* $\beta > 1$. ▲

b. Le cas $\alpha \neq 1$

i. Etudions les séries de Bertrand de termes généraux $u_n = \dfrac{1}{n^2\ \ln n}$, $v_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$, $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{26}}$.

- la première converge par la règle $n^\alpha u_n$. En effet $u_n = o(\frac{1}{n^2})$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
- la deuxième converge par la même règle car $v_n = o(\frac{1}{n^{3/2}})$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
- la troisième diverge par comparaison puisqu'il existe une constante $C > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $w_n \geq C\,(\frac{1}{n^{2/3}})$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. ▲

ii. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ un réel quelconque.

- Si $\alpha > 1$, montrons que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$ est convergente.

  Pour cela, posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$. On peut noter que $1 < \gamma < \alpha$. Par conséquent, d'après le théorème de comparaisons des suites de référence :

  $$n^\gamma\, u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  D'après la règle "$n^\alpha u_n$", il s'en suit que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$ est convergente.

- Si $\alpha < 1$, posons comme précédemment $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$. On peut noter qu'en ce cas $\alpha < \gamma < 1$. Il en résulte que

  $$\frac{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}{n^\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  Par conséquent il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $n^\alpha\,(\ln n)^\beta \leq n^\gamma$, i.e.

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n^\gamma}$$

  Comme la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^\gamma}$ est divergente, j'en déduis par le théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$ est elle-même divergente. ▲

Partie II. Variables aléatoires

1. Préliminaires algébriques

On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. **i.** $A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$. ▲

ii. $A^2 = 10\ A - 24\ I$. ▲

iii. De l'égalité ci-dessus, je tire $-\frac{1}{24}(A - 10\ I) \times A = I$. Par conséquent, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{-1}{24}(A - 10\ I) = \frac{-1}{24}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

▲

b. **i.** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation polynomiale obtenue à la question **1.a**, nous avons :

$$A^{n+2} - 10A^{n+1} + 24A^n = A^n \times \left(A^2 - 10\ A + 24I\right) = A^n \times 0 = 0$$

▲

ii. Montrons par récurrence double sur n l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, récurrentes linéaires d'ordre 2, telles que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\mathscr{P}(n) \qquad A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Initialisation : Comme $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$, $a_1 = 5, a_2 = 26$, $b_1 = 1$ et $b_2 = 10$ conviennent.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ l'est aussi. Par hypothèse de récuurence et la relation polynomiale obtenue précédemment, il vient

$$A^{n+2} = 10A^{n+1} - 24A^n = \begin{pmatrix} 10a_{n+1} - 24a_n & 10b_{n+1} - 24b_n \\ 10b_{n+1} - 24b_n & 10a_{n+1} - 24a_n \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$A^{n+2} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & b_{n+2} \\ b_{n+2} & a_{n+2} \end{pmatrix}$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} a_{n+2} & = 10\, a_{n+1} \quad -24a_n \\ b_{n+2} & = 10\, b_{n+1} \quad -24b_n \end{cases}$$

Conclusion : Nous avons démontré l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

De plus les suites (a_n) et (b_n) vérifient les *conditions initiales* $a_1 = 5, a_2 = 26$, $b_1 = 1$ et $b_2 = 10$ et les *relations de récurrence* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \begin{cases} a_{n+2} & = 10\, a_{n+1} \quad -24a_n \\ b_{n+2} & = 10\, b_{n+1} \quad -24b_n \end{cases}.$$

▲

iii. Pour déterminer l'expression de A^n en fonction de n, j'explicite a_n et b_n. Ces suites vérifient la même relation de récurrence double,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+2} = 10\, u_{n+1} - 24u_n.$$

L'équation caractéristique

$$X^2 - 10X + 24 = 0$$

admet pour racines évidentes 4 et 6. Ainsi le terme général de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifiant cette relation s'écrit

$$u_n = \lambda\, 4^n + \mu\, 6^n$$

Les conditions initiales déterminent les valeurs de λ et μ. *Namely* :

Calcul de a_n :

$$\left\{\begin{array}{rrl} 4\lambda & +6\mu & = 5 \\ 16\lambda & +36\mu & = 26 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrl} 4\lambda & +6\mu & = 5 \\ & 12\mu & = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \lambda & = \frac{1}{2} \\ \mu & = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = \frac{1}{2}\big(4^n + 6^n\big)}$$

Calcul de b_n :

$$\left\{\begin{array}{rrl} 4\lambda & +6\mu & = 1 \\ 16\lambda & +36\mu & = 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrl} 4\lambda & +6\mu & = 1 \\ & 12\mu & = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \lambda & = -\frac{1}{2} \\ \mu & = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad b_n = \frac{1}{2}\big(6^n - 4^n\big)}$$

▲

2. **Jeu de boules**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et d'une pièce de monnaie non truquée.
Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.
On considère l'expérience aléatoire e suivante :

- on lance la pièce :
  - si l'on obtient *pile*, on tire une boule de U_1,
  - si on obtient *face*, on tire une boule de U_2
- puis
  - si la boule obtenue est noire, elle est remise dans la même urne
  - si elle est blanche elle est changée d'urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve la boule blanche à l'issue de n répétitions de l'expérience e.

a. Etude de X_1

Il est clair que $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements non négligeables U_1 et U_2 permet de déterminer les probabilités $P[X_1 = 1]$ et $P[X_1 = 2]$:

x_i	1	2
$p[X_1 = x_i]$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Nous en déduisons également $E(X_1) = 7/6$ et $V(X_1) = 5/36$. ▲

b. Relation de récurrence

On réitère à présent l'expérience e un certain nombre de fois.
Soit n un entier naturel non nul.

i. Supposons qu'à l'issue de de n répétitions de e la boule blanche se trouve dans l'urne 1. En ce cas, la situation après n répétitions est la situation initiale :

$$p\big([X_{n+1} = 1] | [X_n = 1]\big) = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad p\big([X_{n+1} = 2] | [X_n = 1]\big) = \frac{1}{6}$$

▲

ii. Supposons que $X_n = 2$. En échangeant les rôles de U_1 et U_2 dans la question précédente, nous obtenons :

$$p\big([X_{n+1} = 1] | [X_n = 2]\big) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad p\big([X_{n+1} = 2] | [X_n = 2]\big) = \frac{5}{6}$$

▲

iii. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements non négligeables $[X_n = 1]$, $[X_n = 2]$, il vient :

$$p[X_{n+1} = 1] = \frac{5}{6}\ P[X_n = 1] + \frac{1}{6}\ P[X_n = 2] \ \text{ et } \ p[X_{n+1} = 2] = \frac{1}{6}\ P[X_n = 1] + \frac{5}{6}\ P[X_n = 2]$$

c. **Etude de X_n**

Notons pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, la matrice colonne $V_n = \begin{pmatrix} p[X_n = 1] \\ p[X_n = 2] \end{pmatrix}$.

i. D'après la question précédente,

$$M \times V_n = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p[X_n = 1] \\ p[X_n = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}\ P[X_n = 1] + \frac{1}{6}\ P[X_n = 2] \\ \frac{1}{6}\ P[X_n = 1] + \frac{5}{6}\ P[X_n = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p[X_{n+1} = 1] \\ p[X_{n+1} = 2] \end{pmatrix} = V_{n+1}.$$

▲

ii. Une récurrence immédiate montre alors que $V_n = M^{n-1}V_1$, pour tout entier naturel n non nul $V_n = M^{n-1} \times V_1$. ▲

iii. D'après les *résultats préliminaires*,

$$M^{n-1} = \frac{1}{6}\ A^{n-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (4/6)^{n-1} & 1 - (4/6)^{n-1} \\ 1 - (4/6)^{n-1} & 1 + (4/6)^{n-1} \end{pmatrix}$$

De l'égalité $V_n = M^{n-1} \times V_1$ et de $V_1 = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$, nous déduisons facilement :

$$\begin{aligned} P[X_n = 1] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{6}\big(1 + (2/3)^{n-1}\big) + \frac{1}{6}\big(1 - (2/3)^{n-1}\big) \right\} \\ P[X_n = 2] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{6}\big(1 - (2/3)^{n-1}\big) + \frac{1}{6}\big(1 + (2/3)^{n-1}\big) \right\} \end{aligned}$$

▲

d. Par suite

$$E(X_n) = \big(1+(2/3)^{n-1}\big)(5/12+2/12) + \big(1-(2/3)^{n-1}\big)(1/12+10/12) = \frac{7}{12}\ \big(1+(2/3)^{n-1}\big) + \frac{11}{12}\ \big(1-(2/3)^{n-1}\big)$$

D'où $\lim\limits_{n \to \infty} E(X_n) = 18/12 = 3/2$. ▲