Corrigé du Devoir Libre n° 11

Problème 1 : Tirages successifs avec remises

Soient b un entier naturel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'**entiers naturels** telle que $u_0 = b$.

Partie I. Le jeu s'arrête-t-il ?

On note pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$

– A_n l'événement "*une boule blanche apparaît à chacun des n premiers tirages*",

– B_n l'événement "*Au $n^{i\grave{e}me}$ tirage, on a obtenu une boule blanche*",

et $p_n = P(\bar{B}_n)$ et $q_n = P(A_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $A_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$. Par la formule des probabilités composées, il en résulte :

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times \cdots \times P(B_n|B_{n-1} \cdot \cdots \cdot B_2 \cdot B_1) \\
&= \frac{b}{u_0 + b} \times \frac{u_1}{u_1 + b} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-1} + b} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{b}{u_k + b}).
\end{aligned}$$

▲

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, d'après la question précédente :

$$q_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} (1 - \frac{b}{u_k + b}) = (1 - \frac{b}{u_n + b}) \cdot q_n < q_n.$$

Ainsi, (q_n) est strictement croissante. Comme de plus $(q_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ est bornée, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$. Remarquons enfin que $q_1 = \frac{1}{2}$. Ainsi , $\ell = \inf_n q_n \leq \frac{1}{2}$. ▲

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, de l'égalité $A_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$, je tire en passant aux complémentaires

$$\bar{A}_n = \bar{B}_1 \cup \cdots \cup \bar{B}_n$$

De plus les événements $(\bar{B}_j)$ sont deux à deux incompatibles puisque le jeu s'arrête dès l'obtention d'une boule noire. Par additivité, j'en déduis que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = P(\bar{A}_n) = 1 - q_n$$

Comme la suite $(1 - q_n)$ est convergente de limite $1 - \ell$, la série $\sum p_n$ est convergente de somme $1 - \ell$. ▲

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, d'après la première question

$$\ln q_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 - \frac{b}{u_k + b}\right)$$

Or par hypothèse, la suite u_n est une suite strictement croissante d'entiers ; elle est donc nécessairement divergente vers $+\infty$. Ainsi

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{b}{u_k + b} = 0 \\ \bullet \ \ln 1 + x \sim_0 x \end{array}\right\} \Rightarrow \ln \left(1 - \frac{b}{u_k + b}\right) \sim -\frac{b}{u_k + b} \sim -\frac{b}{u_k}.$$

D'après la règle des équivalents pour les séries à termes positifs, il en résulte

$$\begin{aligned}
\text{La suite } \big(\ln(1/q_n)\big)\text{converge} \quad &\iff \quad \text{la série de terme général } -\ln\big(1-\frac{b}{u_n+b}\big) \text{ converge}\\
&\iff \quad \text{la série de terme général } \big(b/u_n\big) \text{ converge}\\
&\iff \quad \text{la série de terme général } \big(1/u_n\big) \text{ converge.}
\end{aligned}$$

▲

5. Soit B l'événement "*ne jamais obtenir de boule noire*". Alors

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

La suite (A_n) étant décroissante, il découle de la propriété de continuité décroissante des probabilités que

$$P(B) = P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} q_n = \ell.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
P(B) = 0 \quad &\iff \quad \lim_{n\to\infty} q_n = 0\\
&\iff \quad \lim_{n\to\infty} \ln(1/q_n) = +\infty\\
&\iff \quad \sum 1/u_n \ \text{ diverge.}
\end{aligned}$$

▲

Partie II. Etude d'un cas particulier

Soit a un entier supérieur ou égal à 2. On suppose dans cette partie que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = b\, a^n$$

1. La série de terme général $\big(1/a\big)^n$ est une série géométrique convergente. D'après la question précédente l en résulte que $P(B) > 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul, alors

$$q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{u_k+b} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{1+a^k}.$$

▲

3. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+p-1} (1/a)^k \quad &= \quad (1/a)^n \times \sum_{k=0}^{p-1} (1/a)^k = (1/a)^n \times \frac{1-(1/a)^p}{1-(1/a)} = (1/a)^{n-1} \times \frac{1-(1/a)^p}{a-1}\\
&\leq \quad \frac{1}{a^{n-1}\,(a-1)}.
\end{aligned}$$

▲

4. Montrons que pour tout $x \in [0,1]$,

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + 2x$$

Il s'agit d'inégalités de convexité : rappelons que la fonction exp est convexe et indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

- D'après l'**inégalité des tangentes**, le graphe Γ de exp est au-dessus de ses tangentes. En particulier, Γ est au-dessus de la tangente au point 0. Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$$

- D'après l'**inégalité des cordes**, tout arc de Γ est situé sous la corde de mêmes extrémités. En particulier la portion du graphe située entre les points d'abscissses 0 et 1 est au-dessous de la corde de mêmes extrémités. Ainsi

$$\forall x \in [0,1], \quad e^x \leq 1 + \frac{e-1}{1} \times x \leq 1 + 2x.$$

▲

5. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. Remarquons tout d'abord que la suite (q_n) étant strictement décroissante, $\dfrac{q_n}{q_{n+p}} \geq 1$. D'autre part, d'après la question **II.2**

$$1 \leq \frac{q_n}{q_{n+p}} = \prod_{k=n}^{n+p-1} \frac{1+a^k}{a^k} = \prod_{k=n}^{n+p-1} \left(1 + (1/a)^k\right)$$

En utilisant la croissance du logarithme, il s'en suit que

$$0 \leq \ln \frac{q_n}{q_{n+p}} = \sum_{k=n}^{n+p-1} \ln\left(1 + (1/a)^k\right)$$

Or pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $(1/a)^k$ appartient au segment $[0,1]$. Par conséquent, la question précédente –appliquée à $x = (1/a)^k$– montre que $\ln\left(1 + (1/a)^k\right) \leq (1/a)^k$. On conclut alors grâce à la question **II 3.** que

$$\begin{aligned} 0 \leq \ln \frac{q_n}{q_{n+p}} &= \sum_{k=n}^{n+p-1} \ln\left(1 + (1/a)^k\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} (1/a)^k \\ &\leq \frac{1}{a^{n-1}\,(a-1)} \end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle, il en résulte finalement que

$$1 \leq \frac{q_n}{q_{n+p}} \leq \exp\left(\frac{1}{a^{n-1}\,(a-1)}\right)$$

▲

6. Faisons tendre p vers $+\infty$, il vient

$$1 \leq \frac{q_n}{\ell} \leq \exp\left(\frac{1}{a^{n-1}\,(a-1)}\right)$$

D'où je tire

$$0 \leq q_n - \ell \leq \ell \cdot \left(\exp\big(\frac{1}{a^{n-1} \cdot (a-1)}\big) - 1\right)$$

Appliquons l'inégalité $e^x \leq 1 + 2x$ démontrée à la question **II 4.**. En utilisant le fait que $\ell \leq 1/2$, nous obtenons

$$0 \leq q_n - \ell \leq \ell \cdot \frac{2}{a^{n-1} \cdot (a-1)} \leq \frac{1}{a^{n-1} \cdot (a-1)}$$

7. Pour que $q_n$soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-1} près, il suffit d'après l'encadrement ci-dessus que $\dfrac{1}{a^{n-1} \cdot (a-1)} \leq 10^{-1}$. Par exemple, dans le cas $a = 2$, $n = 5$ suffit. En ce cas $q_5 = \ldots$ ▲

Problème 2 : Etude d'une marche aléatoire

1. Résolution d'un système d'équations

On considère le système :

$$(S)\ \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = y_1 \\ & x_2 & -2x_3 & = y_2 \\ & & x_3 & = y_3 \end{cases}$$

a. La matrice P des coefficients de (S) est bien sûr

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▲

b. Le système (S) étant triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls, il s'agit d'un système de Cramer. Nous obtenons directement par remontée son unique solution :

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 & = y_1 & +y_2 & +y_3 \\ x_2 & = & y_2 & +2y_3 \\ x_3 & = & & y_3 \end{cases}$$

▲

c. Par conséquent P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▲

2. Calculs matriciels préliminaires

On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

a.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où $D = P^{-1} \times M \times P = Diag(1, 1/2, 1/3)$ ▲

b. En mulipliant l'égalité $D = P^{-1} \times M \times P$ à gauche par P et à droite par P^{-1}, nous obtenons tout d'abord $M = P \times D \times P^{-1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, une récurrence immédiate permet alors d'en déduire $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$. ▲

c. Comme $D^n = Diag(1, 1/2^n, 1/3^n)$ il en résulte que

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 1/2^n & 1 - 1/2^{n-1} + 1/3^n \\ 0 & 1/2^n & 1/2^{n-1} - 2/3^n \\ 0 & 0 & 1/3^n \end{pmatrix}.$$

▲

3. Etude d'une marche aléatoire

Pour tout nombre entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$ son espérance. L'énoncé donne les probabilités conditionnelles :

- $P[X_{n+1}=0|X_n=2]=P[X_{n+1}=1|X_n=2]=P[X_{n+1}=2|X_n=2]=1/3$
- $P[X_{n+1}=0|X_n=1]=P[X_{n+1}=1|X_n=1]=1/2$
- $P[X_{n+1}=0|X_n=0]=1$

a. Soit $n\in\mathbb{N}$ la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements non négligeables $[X_n=0]$, $[X_n=1]$ et $[X_n=2]$ donne :

$$\left\{\begin{array}{llll} P[X_{n+1}=0] & = P[X_n=0] & +1/2\,P[X_n=1] & +1/3\,P[X_n=2] \\ P[X_{n+1}=1] & = & 1/2\,P[X_n=1] & +1/3\,P[X_n=2] \\ P[X_{n+1}=2] & = & & 1/3\,P[X_n=2] \end{array}\right. .$$

▲

b. Notons pour $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\begin{pmatrix} P[X_n=0] \\ P[X_n=1] \\ P[X_n=2]\end{pmatrix}$. D'après la question précédente

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\times U_n.$$

Notons M la matrice ci-dessus, de sorte que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad U_{n+1}=M\times U_n.$$

▲

c.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\times M=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}=(1/2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Notons $L=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Ainsi, $L\times M=(1/2)\cdot L$.

Multiplions à gauche par L l'égalité matricielle $U_{n+1}=M\,U_n$, on en déduit

$$L\times U_{n+1}=\frac{1}{2}L\times U_n$$

Par suite

$$\begin{array}{rcl} E\left(X_{n+1}\right) & = & 0\times P[X_{n+1}=0]+P[X_{n+1}=1]+2\cdot P[X_{n+1}=2] \\ & = & L\times U_{n+1}=\dfrac{1}{2}L\times U_n=\dfrac{1}{2}E(X_n). \end{array}$$

Ainsi, la suite $\big(E\left(X_n\right)\big)_n$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Comme $E(X_0)=2$, nous en déduisons

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad E(X_n)=(1/2)^{n-1}.$$

En particulier, $\big(E\left(X_n\right)\big)_n$ est convergente de limite nulle. ▲

d. A partir de la relation $U_{n+1}=M\times U_n$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad U_n=M^n\,U_0$$

Comme $U_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$, les résultats préliminaires donnent : $\forall n\in\mathbb{N},\quad U_n=\begin{pmatrix} 1-1/2^{n-1}+1/3^n \\ 1/2^{n-1}-2/3^n \\ 1/3^n\end{pmatrix}$.

D'où l'on tire $\left\{\begin{array}{ll} P[X_n=0] & = 1-1/2^{n-1}+1/3^n \\ P[X_n=1] & = \quad 1/2^{n-1}-2/3^n \\ P[X_n=2] & = \quad 1/3^n \end{array}\right.$.

En particulier, les suites $\big(P[X_n=0]\big)$, $\big(P[X_n=1]\big)$ et $\big(P[X_n=2]\big)$ sont convergentes de limites respectives 1, 0 et 0. ▲

e. D'après la question précédente $E\left(X_n\right)=1\cdot 1/2^{n-1}-2/3^n+2\cdot 1/3^n=1/2^{n-1}$.
En particulier $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)=0$. ▲