Corrigé du Devoir Libre n°2

Problème 1 : Applications de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_n$

Partie I. Introduction : quelques rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{F}_0$ désigne l'ensemble vide par et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\mathbb{F}_n$ désigne l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$.
Soient n, p deux nombres entiers, l'objectif de cette étude est dénombrer certains sous-ensembles remarquables de l'ensemble $\left(\mathbb{F}_n\right)^{\mathbb{F}_p}$ des applications de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_n$.

1. Card $(\mathbb{F}_n)^{\mathbb{F}_p} = n^p$ ▲
2. Card $\mathscr{A}(p, n) = A_n^p$ ▲
3. Pour dénombrer les p-listes strictement croissantes d'éléments de $\mathbb{F}_n$, je procède par étapes :

   - je choisis une partie $\{k_1, .., k_p\}$de $\mathbb{F}_n$ à p éléments $\rightsquigarrow \binom{n}{p}$ possibilités ;
   - je range les éléments $k_1, .., k_p$ par ordre strictement croissant $\rightsquigarrow$ 1 possibilité.

   Au total, il y a $\binom{n}{p}$ p-listes strictement croissantes d'éléments de $\mathbb{F}_n$. D'où Card $\mathscr{F}_{sc}(p, n) = \binom{n}{p}$. ▲
4. Lorsque $n \neq p$ il n'y a pas de bijection de $\mathbb{F}_n$ sur $\mathbb{F}_p$. Si $n = p$, on note généralement $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{F}_n$ dans lui-même, appelées **permutations**, car leur action sur $(1, 2, .., n)$ correspond à ré-arranger les termes de cette n-liste dans un ordre différent. On a Card $\mathfrak{S}_n = n!$. ▲

Partie II. Combinaisons à répétition

II-1. *Applications croissantes de* $\mathbb{F}_p$ *dans* $\mathbb{F}_n$.

Dans cette partie on s'intéresse à dénombrer le sous-ensemble $\mathscr{F}_c(p, n)$ de $\left(\mathbb{F}_n\right)^{\mathbb{F}_p}$ formé des **applications croissantes** de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_n$. On note

$$\boxed{\Gamma_n^p = \text{Card } \mathscr{F}_c(p, n)}$$

1. $\Gamma_n^0 = 1$ car il n'y a qu'une application de l'ensemble vide vers n'importe qui. De plus cette application est croissante(!) car la croissance est une propriété universelle sur *ensemble de départ*[2].
   D'autre part, $\Gamma_0^0 = 1$ comme nous venons de le voir et lorsque $p > 0$, il n'y a pas d'application de $\mathbb{F}_p$ dans $\emptyset$. (tout élément de l'ensemble de départ doit avoir une image dans l'ensemble d'arrivée). ▲

On considère désormais que n et p sont non nuls.

2. Soit $f \in \mathscr{F}_c(p, n)$ fixée. On définit une nouvelle application $\varphi_f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_{n+p-1}$ de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{F}_p, \quad \varphi_f(k) = f(k) + k - 1.$$

   a. L'exemple : soit $f : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_3$ définie par $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = f(4) = 3$.
      i. L'application f est croissante car $f(1) \leq f(2) \leq fd(3) \leq f(4)$.
      ii. φ_f est définie par : $\varphi_f(1) = 1$; $\varphi_f(2) = 3$; $\varphi_f(3) = 5$; $\varphi_f(4) = 6$
      iii. φ_f est strictement croissante car $1 < 3 < 5 < 6$.

   b. Montrons que φ_f est **strictement croissante**.
   Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$, comme par hypothèse, f est croissante, il vient :

$$\varphi_f(k+1) - \varphi_f(k) = f(k+1) + k - f(k) - k + 1 = 1 + f(k+1) - f(k) \geq 1$$

   Ainsi, nous avons montré que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $\varphi_f(k+1) - \varphi_f(k) > 0$, i.e. φ_f est strictement croissante. ▲

   c. Comme φ_f est strictement croissante, elle est *a fortiori* croissante d'où l'encadrement, valable pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$: $\varphi_f(1) \leq \varphi_f(k) \leq \varphi_f(p)$. Or par construction, $\varphi_f(1) = f(1)$ et $\varphi_f(p) = f(p) + p - 1$. Comme par hypothèse, f est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, il résulte de la transitivité de l'ordre $\leq$ que :
   . $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $1 \leq \varphi_f(k) \leq n + p - 1$. ▲

3. Considérons à présent l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi\ : & \mathscr{F}_c(p,n) & \to & \mathscr{F}_{sc}(p,n+p-1) \\ & f & \mapsto & \varphi_f \end{array}$$

nous venons de vérifier que Φ est bien définie. Montrons que Φ est une bijection. Pour cela définissons pour tout $g \in \mathscr{F}_{sc}(p,n+p-1)$ l'application ψ_g par :

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\ \psi_g(k) = g(k) - (k-1).$$

On vérifie comme précédemment que la fonction ψ_g est croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$. Posons alors

$$\begin{array}{rccc} \Psi\ : & \mathscr{F}_{sc}(p,n+p-1) & \to & \mathscr{F}_c(p,n) \\ & g & \mapsto & \psi_g \end{array}.$$

On vérifie aisément que Ψ est bien définie et que $\Psi\circ\Phi = Id$ et $\Phi\circ\Psi = Id$. En effet par exemple pour démontrer que $\Psi\circ\Phi = Id$, on prend une fonction f croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ on lui associe par Φ la fonction obtenue en **ajoutant**[1] $k-1$ à l'image de k par f, puis on lui la fonction obtenue en **retranchant**[2]$k-1$. Au final, on retrouve la fonction f. ▲

4. Ainsi $\mathscr{F}_c(p,n) \simeq \mathscr{F}_{sc}(p,n+p-1)$. D'après les résultats préliminaires (I.3), il vient : $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ ▲

II-2. *Combinaisons à répétitions*

Définition : *Etant donné un ensemble E à n éléments, on appelle* ***combinaison de p éléments avec répétition*** *une collection de p éléments de E, ces éléments étant éventuellement répétés et l'ordre d'énumération n'intervenant pas.*

1. Exemples

a. Soit $E = \{a,b\}$. Les combinaisons à répétitions de E

d'ordre 2 sont $[a,a],[a,b],[b,b]$.

d'ordre 3 sont $[a,a,a],[a,a,b],[a,b,b],[b,b,b]$.

b. Soit $E = \{a,b,c\}$. Les combinaisons à répétitions de E

d'ordre 2 sont $[a,a],[a,b],[a,c],[b,c],[b,b],[c,c]$.

d'ordre 3 sont $[a,a,a],[a,a,b],[a,a,c],[a,b,b],[a,b,c],[a,c,c],[b,b,b],[b,b,c],[b,c,c],[c,c,c]$. ▲

2. Notons $\mathscr{G}(p,n)$, l'ensemble des combinaisons à répétitions de p éléments de E_n. On montre que Card $\mathscr{G}(p,n) = \Gamma_n^p$. The proof is almost obvious. Pour chaque combinaison à répétition $\gamma \in \mathscr{G}(p,n)$, il n'y a qu'une manière de ranger ses éléments dans l'ordre croissant. Plus précisément , l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Theta\ : & \mathscr{F}_c(p,n) & \to & \mathscr{G}(p,n) \\ & f & \mapsto & [f(1),f(2),\dots,f(p)] \end{array}$$

réalise une bijection de $\mathscr{F}_c(p,n)$ sur $\mathscr{G}(p,n)$. Il y a donc Γ_n^p combinaison à répétition de p éléments de E_n. ▲

II-3. *Applications*

1. Soient $n,p \in \mathbb{N}^\star$. On considère $\gamma = [k_1,\dots,k_p] \in \mathscr{G}(p,n)$ une p-combinaison à répétition de $\mathbb{F}_n$. On note m_1, m_2, …, m_n le nombre d'occurrences de 1, 2,…, n dans γ. Ainsi $m_1+\cdots+m_n$ est simplement le nombre total d'éléments de γ en comptant les répétitions. D'où bien sûr $m_1+\cdots+m_n = p$. ▲

2. Réciproquement , si $(m_1,\dots,m_n)$ est une n-liste d'entiers vérifiant $m_1+\cdots+m_n = p$, on lui associe une p-combi à répétition de $\mathbb{F}_n$ en posant :

$$\gamma = [\underbrace{1,\dots,1}_{m_1\ fois},\underbrace{2,\dots,2}_{m_2\ fois},\cdots,\underbrace{n,\dots,n}_{m_n\ fois}]$$

L'hypothèse $m_1+\cdots+m_n = p$ assure que dans cette combinaison à répétitions il y a exactement p nombres en comptant bien sûr les répétitions.

Résumons-nous : les procédés décrits ci-dessus, permettent de définir deux applications

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{K}\ : & \mathscr{G}(p,n) & \to & \{n-uplets \mid m_1+m_2+\cdots+m_n = p\} \\ & \gamma = [k_1,\dots,k_p] & \mapsto & (m_1,m_2,\dots,m_n) \end{array}$$

[1]c'est l'action de Φ n'est-ce pas ?

[2]c'est l'action de Ψ cette fois-ci

et

$$\mathfrak{H} \ : \quad \begin{array}{ccc} \{n-uplets \mid m_1+m_2+\dots+m_n=p\} & \to & \mathscr{G}(p,n) \\ (m_1,m_2,\dots,m_n) & \mapsto & \gamma=[\underbrace{1,.,1}_{m_1 fs},\underbrace{2,.,2}_{m_2 fs},\cdots,\underbrace{n,.,n}_{m_n fs}] \end{array}$$

qui sont réciproques l'une de l'autre.
Ainsi, il y a Γ_n^p n-listes d'entiers $(m_1,\dots,m_n)$ vérifiant $m_1+m_2+\dots+m_n=p$. ▲

Partie III. Partitions

Dans cette partie on s'intéresse à dénombrer le sous-ensemble $\mathscr{S}(p,n)$ de $\left(\mathbb{F}_n\right)^{\mathbb{F}_p}$ formé des **applications surjectives** de $\mathbb{F}_p$ sur $\mathbb{F}_n$. On note $\mathfrak{S}(p,n)=\mathsf{Card}\ \mathscr{S}(p,n)$.

III-1. *Premiers exemples*

1. **a.** $\mathfrak{S}(0,0)=1$ et si $p>0$ $\mathfrak{S}(p,0)=0$ **b.** $\mathfrak{S}(p,1)=1$ si $p>0$ et $\mathfrak{S}(0,1)=0$ **c.** $\mathfrak{S}(p,p)=p!$
   d. si $p<n$, $\mathfrak{S}(p,n)=0$ ▲
2. Soit $p\geq 2$, une application $f:\mathbb{F}_p\to\{1,2\}$ est soit constante (identiquement égale à 1, ou identiquement égale à 2) soit surjective. Par conséquent$\mathscr{S}(p,2)$ est simplement le complémentaire dans $(\mathbb{F}_n)^{\mathbb{F}_p}$ de l'ensemble formé des deux applications constantes ! D'où $\mathfrak{S}(p,2)=\mathsf{Card}\ \mathscr{S}(p,2)=\mathsf{Card}\ (\mathbb{F}_n)^{\mathbb{F}_p}-2=2^p-2$. ▲

III-2. *Formule de récurrence*

1. Soit $f\in\mathscr{S}(p+1,n+1)$ une application surjective de $\mathbb{F}_{p+1}$ sur $\mathbb{F}_{n+1}$. On note $f_|$ la restriction de f à $\mathbb{F}_p$ et $a=f(p+1)$. Par construction $p+1\in \overset{-1}{f}(\{a\})$. Donc $\mathsf{Card}\ \overset{-1}{f}(\{a\})\geq 1$. Ainsi, deux cas se présentent :
   either $\mathsf{Card}\ \overset{-1}{f}(\{a\})=1$, i.e. $p+1$ est le seul antécédent de a par f et ds ce cas $f_|$ est une surjection sur $\mathbb{F}_{n+1}\setminus\{a\}$
   or $\mathsf{Card}\ \overset{-1}{f}(\{a\})>1$ et dans ce cas $f_|$ est déjà une surjection sur $\mathbb{F}_{n+1}$. ▲
2. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star$. On pose (avec les notations précédentes)

   $$\mathscr{S}(p+1,n+1)=\{f\in\mathscr{S}(p+1,n+1)\mid \mathsf{Card}\ \overset{-1}{f}(\{a\})=1\}\cup\{f\in\mathscr{S}(p+1,n+1)\mid \mathsf{Card}\ \overset{-1}{f}(\{a\})>1\}=\mathscr{S}_1\sqcup\mathscr{S}_2$$

   Dénombrons$\mathscr{S}_1$: je discute svt la valeur $a\in[\![1,n+1]\!]$ de $f(p+1)$
   - je choisis une application $f_|:\mathbb{F}_p\to\mathbb{F}_{n+1}\setminus\{a\}$ surjective, $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{S}(p,n)$ possibilités,
   - je la prolonge en une application de $\mathscr{S}_1$ en posant $f(p+1)=a$, $\rightsquigarrow$ 1 possibilité.

   $$\mathsf{Card}\ \mathscr{S}_1=\sum_{a=1}^{n+1}\mathfrak{S}(p,n)=(n+1)\mathfrak{S}(p,n)$$

   Dénombrons$\mathscr{S}_2$: je discute svt la valeur $a\in[\![1,n+1]\!]$ de $f(p+1)$
   - je choisis une application $f_|:\mathbb{F}_p\to\mathbb{F}_{n+1}$ surjective, $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{S}(p,n+1)$ possibilités
   - je la prolonge en une application de $\mathscr{S}_2$ en posant $f(p+1)=a$, $\rightsquigarrow$ 1 possibilité.

   $$\mathsf{Card}\ \mathscr{S}_2=\sum_{a=1}^{n+1}\mathfrak{S}(p,n+1)=(n+1)\mathfrak{S}(p,n+1)$$

   Ainsi, nous avons démontré que pour tous entiers n et p dans $\mathbb{N}^\star$,

   $$\boxed{\mathfrak{S}(p+1,n+1)=(n+1)\times(\mathfrak{S}(p,n)+\mathfrak{S}(p,n+1))}$$

3. Nous déduisons de la formule ci-dessus un tableau des $\mathfrak{S}(p,n)$ pour tous entiers p et n compris entre 1 et 5.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$p=1$	1				
$p=2$	1	2			
$p=3$	1	6	6		
$p=4$	1	14	36	24	
$p=5$	1	30	150	240	120

III-3. *Expression de* $\mathfrak{S}(\mathbf{p},\mathbf{n})$ *en fonction de* p *et* n

Dans cette partie, nous établissons une formule qui donne directement l'expression de $\mathfrak{S}(p,n)$ en fonction de p et n.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ .Notons $\mathscr{F}_k = \{f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_n \mid \mathsf{Card}\ f(\mathbb{F}_p) = k\}$. Pour dénombrer $\mathscr{F}_k$, je procède par étapes :

- je choisis une partie C_k à k éléments de $\mathbb{F}_n$, $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités
- je choisis une application $f : \mathbb{F}_p \to C_k$ **surjective** $\rightsquigarrow \mathfrak{S}(p, k)$ possibilités.

Au total, $\mathsf{Card}\ \mathscr{F}_k = \binom{n}{k} \times \mathfrak{S}(p, k)$ ▲

2. n^p étant le nombre total d'applications de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_n$, en discutant suivant la valeur $k \in [\![0, n]\!]$ du cardinal de l'image de f, j'obtiens

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{S}(p, k).$$

Nous avons ainsi obtenu un expression du nombre total d'applications de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_n$ en *fonction* des $\mathfrak{S}(p, k)$. ▲

3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles vérifiant

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après (1) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} b_l = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{l} b_l \right) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \right) b_l. \end{aligned}$$

Attention : pour le calcul ci-dessus j'ai ré-indexé les sommes en remarquant[3] que

$$\{(k, l) \mid 0 \le k \le n \text{ et } 0 \le l \le k\} = \{(k, l) \mid 0 \le l \le n \text{ et } l \le k \le n\}$$

Notons $\delta_{n,l}$ le coefficient de b_l dans l'expression ci dessus. Plus précisément, $\delta_{n,l} = \sum_{k=l}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{l}$.

Pour conclure ce calcul, il nous suffit de vérifier que $\delta_{n,l} = \begin{cases} 0 \text{ si } l \neq n \\ 1 \text{ si } l = n \end{cases}$. Faisons le changement d'indice $\left| \begin{array}{l} j = k - l \\ j \in [\![0, n-l]\!] \end{array} \right.$ dans $\delta_{n,l}$, il vient :

$$\begin{aligned} \delta_{n,l} &= \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-l-j} \binom{n}{j+l} \binom{j+l}{l} = \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-l-j} \frac{n!}{(j+l)!\ (n-j-l)!} \times \frac{(j+l)!}{l!\ j!} \\ &= \frac{n!}{l!\ (n-l)!} \sum_{j=0}^{n-l} (-1)^{n-l-j} \frac{(n-l)!}{j!\ (n-j-l)!} = \frac{n!}{l!\ (n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l-k} \binom{n-l}{k} \\ &= \frac{n!}{l!\ (n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \binom{n-l}{k} 1^k\ (-1)^{n-l-k} \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, si $l \neq n$, nous reconnaissons dans cette dernière expression $(1-1)^{n-l} = 0$. Si $l = n$, on vérifie aisément que $\delta_{n,n} = 1$. Ainsi, nous pouvons conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ a_k = \sum_{l=0}^{n} \delta_{n,l} b_l = b_n.$$

▲

4. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Si $n \in \mathbb{N}$ est strictement supérieur à p, nous avons déjà vu que $\mathfrak{S}(p, n) = 0$. Notons pour tout $n \le p$, $a_n = n^p$ et $b_n = \mathfrak{S}(p, n)$. D'après la question 2. ces suites sont liées par la relation $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Par conséquent, nous pouvons *inverser* cette relation grâce à la question précédente, il vient :

$$\mathfrak{S}(p, n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p.$$

▲

[3] faîtes un petit schéma représentant le produit cartésien $[\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$ et marquez d'une croix les couples d'indices qui correspondent aux termes que vous devez sommer

III-4. *Applications*

1. **Partitions**

Notons $\mathscr{P}_p(E)$ l'ensemble formé des partitions d'un ensemble E à p éléments en n parties **non vides**. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi\ : & \mathscr{S}(p,n) & \to & \mathscr{P}_p(E) \\ & f & \mapsto & \left(\overset{-1}{f}(\{1\}), \overset{-1}{f}(\{2\}), \dots, \overset{-1}{f}(\{n\})\right) \end{array}$$

est bien définie car pour toute *application* $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_n$ **surjective**, la famille $\left(\overset{-1}{f}(\{k\})\right)_{k\in\mathbb{F}_n}$ est une *partition* de $\mathbb{F}_p$ constituée de parties **non vides**. On vérifie aisément que Φ est bijective. Ainsi $\mathscr{S}(p,n) \simeq \mathscr{P}_p(E)$. Il y a donc $\mathfrak{S}(p,n)$ partitions d'un ensemble à p éléments en n parties non vides. ▲

2. On range p boules *discernables* dans n cases *non discernables*. De combien de façons différentes peut-on ranger les boules de sorte qu'aucune case ne soit laissée vide ?

Notons $E = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ l'ensemble des p boules et supposons en un premier temps que les cases sont *discernables* : $C_1, \dots C_n$. Un rangement possible de l'ensemble des p boules dans l'ensembles des cases discernables est une partition de E en n parties non vides. Il y a donc $\mathfrak{S}(p,n)$ façons de ranger ces boules dans des cases discernables. Mais l'énoncé précise que les cases *ne sont pas discernables*. On peut donc imaginer que l'on cache le numéro de chacune des n cases... Chaque rangement en n cases *non discernables* correspond à $n!$ rangements des p boules en n cases *discernables*. D'après le PRINCIPE DS BERGERS, il y a donc $\dfrac{\mathfrak{S}(p,n)}{n!}$ façons différentes de ranger les p boules en n cases *non discernables*. ▲

EXERCICE 1 : UNE PARTIE DE BOULES

Une urne contient n boules[4] *distinctes* numérotées de 1 à n. On effectue un tirage de p boules, p étant un entier naturel compris entre 1 et n.

1. On suppose dans cette question que les p boules sont extraites *simultanément*.
   - **a.** Un tirage correspond à un choix non ordonné et sans remise de p éléments parmi n. Il y a donc $\binom{n}{p}$ tirages possibles.
   - **b.** Soit k un entier tel que $p \le k \le n$.
     - **i.** Le nombre de tirages tels que toutes les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à k est $\binom{k}{p}$ ▲
     - **ii.** Pour dénombrer le nombre de trirage pour lesquels le plus grand numéro est k je procède par étapes :
       - je choisis la boule portant le numéro k $\rightsquigarrow$ 1 possibilité .
       - je choisis $p-1$ autres boules portant des numéros inférieurs ou égaux à $k-1$ $\rightsquigarrow$ $\binom{k-1}{p-1}$possibilités

       Au total, il y a $\binom{k-1}{p-1}$ tirages de p boules dont le plus grand numéro est k. ▲
   - **c.** Je calcule le nombre total de tirages possibles en discutant suivant la valeur $k \in [\![p, n]\!]$ du plus grand numéro obtenu, il vient : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$. ▲
2. On suppose dans cette question que les tirages sont *successifs* et *sans remise*.
   - **a.** Un tirage correspond à un choix ordonné et sans répétition de p objets parmi n. Il s'agit d'un arrangement. Il y a donc A_n^p tirages possibles.
   - **b.** Par symétrie, il y a autant de tirages commençant par la boule n°2 que par l'une quelconque des n boules. Il y a donc $\dfrac{A_n^p}{n} = A_{n-1}^{p-1}$ tirages qui débutent par la boule n°2. ▲
3. On suppose dans cette question que les tirages sont *successifs* et *avec remise*.
   - **a.** Un tirage correspond à un choix ordonné et avec répétition de p objets parmi n. Il s'agit d'une p-liste. Il y a donc n^p tirages possibles. ▲
   - **b.** Remarquons que si $p = 1$ il n'existe pas de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est *strictement* inférieur au dernier. Dans le cas où $p \ge 2$ je calcule le nombre de tels tirages en discutant suivant la valeur $k \in [\![1, n]\!]$ du premier numéro obtenu :
     - je la première boule qui porte le numéro k $\rightsquigarrow$ 1 possibilité .
     - je choisis les $2^{\text{ième}}$, $3^{\text{ième}}$, $\dots p-1^{\text{ième}}$ boules. $\rightsquigarrow$ n^{p-2} possibilités ;
     - je choisis la $p^{\text{ième}}$ boule portant un numéro compris entre $k+1$ et n $\rightsquigarrow$ $n-k$ possibilités

[4] $n \in \mathbb{N}^\star$

Au total, il y a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k)\ n^{p-2} = n^{p-2}\left(\sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{n^p - n^{p-1}}{2}$ possibilités. ▲

c. Pour que la somme des numéros obtenus soit $p+2$, il n'y a que deux possibiltés :
– soit j'ai tiré $p-1$ fois la boule portant le n° 1 et une fois la boule portant le n° 3
– soit j'ai tiré $p-2$ fois la boule n° 1 et deux fois la boule portant le n°2.
Notons $N_{p,n}$ et $M_{p,n}$ les nombres de tirages correspondants aux deux possibilités ci-dessus.

Calculons $N_{p,n}$: remarquons que si $n \leq 2$ $N_{p,n} = 0$ puisqu'en ce cas, il n'y a que deux boules au plus, portant les n° 1 et 2. Supposons donc que $n \geq 3$. Pour calculer $N_{p,n}$ je raisonne par étapes :

- je choisis la place de la boule portant le n° 3 dans mon tirage $\rightsquigarrow \binom{p}{1} = p$ possibilités
- je choisis les $p-1$ autres boules qui portent toutes le n° 1. $\rightsquigarrow$ 1 possibilité ;

D'où $N_{p,n} = p$ si $n \geq 3$ et $N_{p,n} = 0$ si $n \leq 2$.

Calculons $M_{p,n}$: remarquons que si $p \leq 1$ ou $n \leq 1$, $M_{p,n} = 0$. Supposons donc que $n \geq 2$ et $p \geq 2$. Pour calculer $M_{p,n}$ je raisonne par étapes :

- je choisis les places des boules portant le n° 2 dans mon tirage $\rightsquigarrow \binom{p}{2}$ possibilités
- je choisis les $p-2$ autres boules qui portent toutes le n° 1. $\rightsquigarrow$ 1 possibilité ;

D'où $M_{p,n} = \binom{p}{2}$ si $n, p \geq 2$ et $M_{p,n} = 0$ sinon.

Au total il y a $N_{p,n} + M_{p,n}$ tirages dont la somme vaut $p+2$.

Par exemple si $n \geq 3$ et $p \geq 2$, cela donne $\dfrac{n\ (n+1)}{2}$ tirages possibles. ▲

d. Notons $L_{p,n}$ le nombre de tirages pour lesquels 2 numéros *exactement* sont apparus. Pour calculer $L_{p,n}$ je raisonne par étapes :

- je choisis la paire $\{i, j\}$ de numéros sortis, $\rightsquigarrow \binom{n}{2}$ possibilités
- je choisis une p liste d'éléments de $\{i, j\}$ $\rightsquigarrow 2^p$ possibilités

Au total, $L_{p,n} = \dbinom{n}{2} \times 2^p = n(n-1)2^{p-1}$. ▲