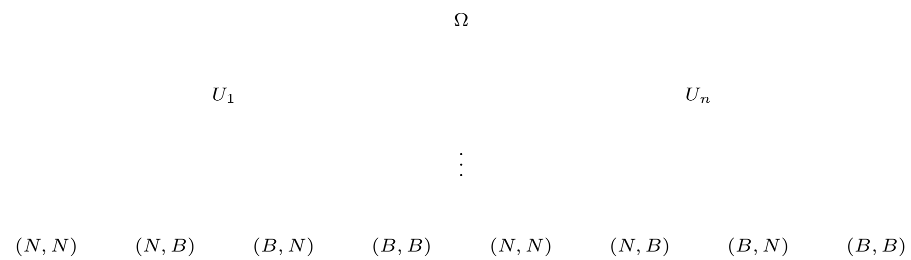
Corrigé du Devoir Libre n° 3

Exercice 1 : jeu de boules

On considère $n(\ n \geq 2)$ urnes numérotées $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne numéro k, U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard puis on tire **successivement et avec remise** deux boules de cette urne.
Un résultat possible est donc une 2-liste de couleurs, par exemple (B, N). Ainsi, nous prenons $\Omega = \{B, N\}^2$. Les événements élémentaires ne sont pas *a priori* équiprobables. En effet *tout est conditionné* par l'urne dans laquelle on tire les boules... Notons pour $k \in [\![1, n]\!]$ U_k l'événement "*le tirage se fait dans l'urne U_k*". Nous pouvons représenter cette expérience aléatoire par un arbre :



Afin d'alléger l'écriture, notons $\mathbb{B}$ l'événement (B, B). On cherche $p(\mathbb{B})$.
Remarquons tout d'abord que l'urne dans laquelle les triages s'effectuent étant choisie au hasard, les événements U_1, ... ,U_n sont équiprobables, par conséquent pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p(U_k) = \frac{1}{n}$. Ainsi la famille (U_k) est un système complet d'événements non négligeables. D'après la formule des probabilités totales, nous avons :

$$p(\mathbb{B}) = \sum_{k=0}^{n} p(U_k) \times p(\mathbb{B}|U_k).$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé, calculons $p(\mathbb{B}|U_k)$. On effectue deux tirages successifs avec remise dans U_k. Un résultat possible est donc un couple de boules de U_k. Notons $\Omega_k = U_k \times U_k$. Les événements élémentaires étant équiprobables Ω_k est muni de la probabilité uniforme. D'où $p(\mathbb{B}|U_k) = \dfrac{\mathsf{Card}\ \mathbb{B} \cap \Omega_k}{\mathsf{Card}\ \Omega_k} = \dfrac{k^2}{n^2}$.

Finalement, la formule des probabilités totales donne :

$$p(\mathbb{B}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

▲

2. On choisit une urne au hasard puis on tire **successivement et sans remise** deux boules de cette urne. Notons comme précédemment, $\Omega = \{B, N\}$ et $\mathbb{B} = (B, B)$. En revanche Ω_k dénote désormais $\mathscr{A}(2, U_k)$ puisque les tirages dans les urnes se font **sans remise**. D'après la formule des probabilités totales, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
p(\mathbb{B}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2\ (n-1)} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{n^2\ (n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n\ (n+1)}{2} \right) = \frac{(n+1)(2n+1-3}{6n(n-1)} \\
&= \frac{n+1}{3n}.
\end{aligned}$$

▲

Problème 1 : Promenades dans le plan

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^\star$ est fixé. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un quadrillage constitué de $(n+1)^2$ points : $E_n = \{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\}$. On note A le point *supérieur droit*, de coordonnées (n, n).

Partie I. Chemins monotones

1. Un exemple

a. La figure ci-contre représente un chemin monotone de l'origine au point A de coordonnées $(6, 6)$.

b. c. Dans un chemin monotone reliant l'origine au point de coordonnées $(6, 6)$, le point mobile effectue 12 déplacements, 6 vers la droite, 6 vers le haut ! ▲

d. Un chemin monotone de l'origine O au point de coordonnées $(6, 6)$ peut-être représenté par une 12-liste de flèches vers le haut ou vers la droite telle que $\rightarrow$ apparaît exactement 6 fois. Ainsi notre exemple peut être codé par

$$(\uparrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow).$$

Un chemin monotone de l'origine O au point de coordonnées $(6, 6)$ correspond à un choix de 6 emplacements de la liste pour les $\rightarrow$. Il y a donc $\binom{12}{6}$ chemins monotones possibles de O à A. ▲

2. Soit $0 \leq p \leq n$. On note $\mathscr{M}_{n-p,p}$ l'ensemble des chemins monotones de l'origine au point $M_{n-p,p}$ de coordonnées $(n-p, p)$. Un chemin monotone reliant l'origine au point $M_{n-p,p}$ peut -être représenté par une n-liste d'éléments de $\{\uparrow, \rightarrow\}$ dans laquelle apparaissent exactement $n-p$ flèches $\rightarrow$.

Par conséquent il y a $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ chemins monotones de l'origine à $M_{n-p,p}$. ▲

3. Je dénombre $\mathscr{M}_{n-p,p}$ suivant que le premier déplacement s'effectue vers le haut ou vers la droite.

- Si le premier déplacement est vertical,
  je choisis les $n-p$ emplacements pour les "$\rightarrow$" parmi les $n-1$ places restantes $\rightsquigarrow \binom{n-1}{n-p}$ possibilités
- Si le premier déplacement est horizontal,
  je choisis les $n-p-1$ emplacements pour les "$\rightarrow$" parmi les $n-1$ places restantes $\rightsquigarrow \binom{n-1}{n-p-1}$ possibilités

Au total, nous avons :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{n-p} + \binom{n-1}{n-p-1} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

. ▲

5. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$, on note B_k le point de (Δ) d'abscisse k. Comme B_k appartient à Δ ses coordonnées (x_k, y_k) vérifient l'équation :$x_k + y_k = n$. Comme par construction, $x_k = k$, nous en déduisons que $y_k = n - k$. ▲

a. D'après la question **2.** il y a $\binom{n}{n-k}$ chemins monotones de l'origine à B_k. ▲

b. Afin d'utiliser les résultats de la question **2.** pour calculer le nombre de chemins monotones de B_k jusqu'à A, je fais un changement de coordonnées : les coordonnées du point A dans le repère $(B_k, \vec{i}, \vec{j})$ sont

$$x'_A = n - k, y'_k = n - (n-k) = k.$$

Ainsi, le nombre de chemins monotones de B_k à A est $\binom{n}{k}$. ▲

c. En déduire le nombre de chemins monotones de l'origine à A qui passent par B_k.

6. Je dénombre les chemins de l'origine O à A .

a. En utilisant les résultats de la question **2.**, j'obtiens d'une part $\mathsf{Card}\ \mathscr{M}_{n,n} = \binom{2n}{n}$

b. D'autre part, en discutant suivant la valeur $k \in [\![0, n]\!]$ de l'abscisse du point d'intersection du chemin monotone avec (Δ), j'obtiens :

- choix d'un chemin monotone de l'origine à B_k $\rightsquigarrow \binom{n}{n-k}$ possibilités

- choix d'un chemin monotone de B_k à A $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités

Au total
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \times \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \qquad \blacktriangle$$

Partie II. Promenades aléatoires

On reprend les notations de la première partie. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ fixé, on note $n = p+q$.

1. On s'intéresse à la probabilité pour que le mobile passe par le point M de coordonnées (p,q). Un résultat possible est un chemin moniotone quelconque composé de n déplacements. On note Ω_n l'ensemble de tels chemins monotones. Comme nous l'avons vu à la première partie, un élément de Ω_n est une n-liste de flèches vers le haut ou vers la droite. D'où
$$\Omega_n = \{\uparrow, \rightarrow\}^n$$
Comme le mobile se déplace à chaque instant vers le haut ou vers la droite avec la même probabilité, Ω_n est muni de la proba U. On note que $\mathsf{Card}\ \Omega_n = 2^n$.

Notons $\mathscr{M}_{p,q}$ l'événement "*le point mobile passe par le point M de coordonnées (p,q)*".
D'après la question **I.2.**, $\mathsf{Card}\ \mathscr{M}_{p,q} = \binom{n}{p} = \binom{p+q}{p}$.

Par conséquent :
$$p(\mathscr{M}_{p,q}) = 2^{-n}\binom{n}{p} \qquad \blacktriangle$$

2. Notons P et Q les points de coordonnées respectives $(p,0)$ et $(0,q)$. On considère le rectangle de sommets O, Q, M et P.
Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que le point de $M_{a,b}$ de coordonnées (a,b) appartienne au rectangle, on définit l'événement $S_{a,b}$: "*le mobile sort du rectangle au point $M_{a,b}$* ".

a. Il est clair que pour sortir du rectangle au point (a,b), il est nécessaire que le mobile passe par $M_{a,b}$!! Ainsi
$$p(S_{a,b}) = p\big(S_{a,b} \cap \mathscr{M}_{a,b}\big) = p(\mathscr{M}_{a,b}) \times p\big(S_{a,b} \mid \mathscr{M}_{a,b}\big)$$
Or, lorsque le mobile passe au point $M_{a,b}$ du coté $PM_{p,q}$ et $M_{a,b} \neq M_{p,q}$, il a une chance sur deux de sortir du rectangle à son prochain déplacement : il faut et il suffit pour cela qu'il effectue un déplacement horizontal.

Par conséquent :
$$p(S_{a,b} \mid \mathscr{M}_{a,b}) = \frac{1}{2}$$
Finalement, en utilisant les résultats de la question précédente, nous obtenons :
$$p(S_{a,b}) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{a+b}}\binom{a+b}{a} \qquad \blacktriangle$$

b. Supposons que le mobile passe par le point $M_{a,b}$ du coté $QM_{p,q}$ et $M_{a,b} \neq M_{p,q}$. Le mobile a alors une chance sur deux de sortir du rectangle à son prochain déplacement : il faut et il suffit pour cela qu'il effectue un déplacement vertical. Nous en déduisons comme précédemment que
$$p(S_{a,b}) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{a+b}}\binom{a+b}{a} \qquad \blacktriangle$$

c. Supposons enfin que le mobile passe par le point $M_{p,q}$. Le mobile est sûr de sortir du rectangle à son prochain déplacement. Autrement dit $p(S_{a,b}|A) = 1$ et par conséquent :
$$p(S_{p,q}) = \frac{1}{2^{p+q}}\binom{p+q}{p} \qquad \blacktriangle$$

3. Notons D l'ensemble des points du côté $PM_{p,q}$ privé de $M_{p,q}$, H l'ensemble des points du côté $QM_{p,q}$ privé de $M_{p,q}$. Comme la famille $(S_{a,b})_{(a,b)\in QOPM_{p,q}}$ forme un système complet d'événements, nous avons :
$$\begin{aligned} 1 &= p(\Omega_n) = \sum_{(a,b)\in D} p(S_{a,b}) + \sum_{(a,b)\in H} p(S_{a,b}) + p(S_{p,q}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{2^{k+p}}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{k+q}}\binom{q+k}{k} + 2 \times \frac{1}{2^{p+q}}\binom{p+q}{p}\right). \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de cette dernière égalité par 2, nous obtenons
$$2 = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{2^{k+p}}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{k+q}}\binom{q+k}{k} + 2 \times \frac{1}{2^{p+q}}\binom{p+q}{p} = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^{k+p}}\binom{p+k}{k} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^{k+q}}\binom{q+k}{k}. \qquad \blacktriangle$$