Corrigé du Devoir Libre n° 4

Exercice 1 : tournois de foot

On considère pour $n \in \mathbb{N}^\star$ $2n$ équipes de foot notées $e_1, \dots, e_{2n}$. Un tournoi consiste en n matches durant lesquels n paires d'équipes s'affrontent. p_n désigne le nombre de tournois possibles à $2n$ équipes.

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad p_{n+1} = (2n+1)p_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, pour dénombrer l'ensemble des tournois à $2n+2$ équipes, je raisonne par étapes :
- Je choisis l'adversaire de e_1 $\rightsquigarrow \binom{2n+1}{1}$ possibilités.
- puis je choisis les rencontres entre les $2n$ équipes restantes $\rightsquigarrow p_n$ possibilités.

Au total, il y a $(2n+1)\ p_n$ façons d'organiser un tournoi à $2n+2$ équipes. Autrement dit $p_{n+1} = (2n+1)p_n$. ▲

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad p_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}$.
Initialisation : Lorsque $n = 1$, il n'y a que deux équipes et donc une seule manière d'organiser ce *mini* tournoi. D'autre part $\frac{2!}{2\times 1!} = 1$. La formule est donc vraie pour $n = 1$.
Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $p_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}$.. Afin de vérifier que $n+1$ *hérite* de cette propriété, calculons $2^{n+1}(n+1)! \times p_{n+1}$. En utilisant le résultat de la première question et l'hypothèse de récurrence, il vient : $2^{n+1}(n+1)! \times p_{n+1} = 2^{n+1}(n+1)! \times (2n+1)p_n = 2^{n+1}(n+1)! \times \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!} = 2(n+1)(2n!) = (2n+2)!$.
En divisant cette égalité par $2^{n+1}(n+1)!$, nous obtenons $p_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}\ (n+1)!}$.
Conclusion : Par récurrence, nous avons démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad p_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}$. ▲

Exercice 2 : Des codes

Soit E l'ensemble des nombres à 4 chiffres choisis parmi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Par exemple 2445 et 5512.

1. Un élément de E est une 4-liste d'éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Par conséquent $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}^4$.
D'où $\mathsf{Card}\ E = 5^4 = 625$ ▲

2. Un nombre écrit avec des chiffres deux à deux distincts est un 4-arrangement de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Par conséquent il y a $A_5^4 = 120$ éléments de E écrits avec des chiffres deux à deux distincts. ▲

3. Soit A la partie de E formée des nombres écrits avec exactement 2 chiffres différents.

a. Notons A_2 le sous-ensemble de A formé des éléments écrits avec deux chiffres distincts dont l'un apparaît exactement 3 fois. Pour dénombrer A_2, je procède par étapes :
- je choisis un **couple** (n, m) de chiffres distincts dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec la convention que n n'apparaîtra qu'une fois dans le chiffre tandis que m apparaîtra trois fois. $\rightsquigarrow A_5^2 = 20$ possibilités.
- je choisis la place où apparaît le n dans le nombre à quatre chiffres $\rightsquigarrow \binom{4}{1} = 4$ possibilités.

Au total, $\mathsf{Card}\ A_2 = 80$. ▲

b. Notons A_1 le sous ensemble de A formé des éléments écrits avec deux chiffres distincts dont l'un apparaît exactement 2 fois. Il est important de remarquer que les deux chiffres qui apparaissent dans les éléments de A_1 jouent des rôles symétriques car si l'un des deux apparaît exactement deux fois, *ma foi*, l'autre aussi ! Par conséquent, pour dénombrer A_1, je raisonne comme suit :
- je choisis une **paire** $\{n, m\}$ de chiffres distincts dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\rightsquigarrow \binom{5}{2} = 10$ possibilités.
- je choisis les places où apparaît le n dans le nombre à quatre chiffres $\rightsquigarrow \binom{4}{2} = 6$ possibilités.

Au total, $\mathsf{Card}\ A_1 = 60$. ▲

c. Pour calculer le nombre d'éléments de A, je discute suivant le nombre de répétitions. Comme les éléments de A sont écrits avec deux chiffres distincts, il y a nécessairement répétition de l'un des eux au moins. D'où

$$A = A_1 \cup A_2$$

De plus cette réunion est disjointe car si l'un des deux est répété 2 fois, l'autre aussi.
Par conséquent $\mathsf{Card}\ A = \mathsf{Card}\ A_1 + \mathsf{Card}\ A_2 = 140$. ▲

4. Soit B le sous-ensemble de E constitué des nombres écrits avec exactement 3 chiffres distincts. Notons C le sous-ensemble de E formé des nombres écrits avec 4 chiffres distincts et D le sous-ensemble de E formé de ceux qui ne sont écrits qu'avec un seul chiffre. Remarquons que les ensembles A, B, C et D forment une partition de E. Par additivité de Card , il vient :

$$\mathsf{Card}\ E = \mathsf{Card}\ A + \mathsf{Card}\ B + \mathsf{Card}\ C + \mathsf{Card}\ D$$

Or C consiste en fait en les 4-arrangement de $\{1,2,3,4,5\}$. Par conséquent $\mathsf{Card}\ C = A_5^4 = 120$. D'autre part, les éléments de D consistent en les répétitions des éléments de $\{1,2,3,4,5\}$. D'où $\mathsf{Card}\ D = 5$. Réinjectons ces résultats dans la formule ci-dessus,
il vient $\mathsf{Card}\ B = \mathsf{Card}\ E - (\mathsf{Card}\ A + \mathsf{Card}\ C + \mathsf{Card}\ D) = 625 - (140 + 120 + 5) = 360.$ ▲

Exercice 3 : Problème de rangement

Notons $U = \{b_1, \dots, b_5\}$ l'ensemble des boules et $C = \{c_1, \dots, c_4\}$ l'ensemble des cases[1]

1. Un rangement est une application de l'ensemble des boules vers l'ensemble des cases. Par conséquent l'ensemble des rangements s'identifie à $\Omega = C^U$. Comme Paul range ses boules au hasard, Ω est muni de la probabilité uniforme.

$$\mathsf{Card}\ \Omega = 4^5 = 2^{10} = 1024$$

Il y a donc 1024 rangements possibles. ▲

2.

a. Soit A_1 l'événement "*une et une seule boîte est occupée*". Une réalisation favorable correspond à une application constante de B vers C. D'où $\mathsf{Card}\ A_1 = 4$.

Par conséquent $p(A_1) = \dfrac{\mathsf{Card}\ A_1}{\mathsf{Card}\ \Omega} = \dfrac{4}{1024} = \dfrac{1}{256}$

b. Soit A_2 l'événement "*exactement deux boîtes sont occupées*". Pour dénombrer A_2, je raisonne par étapes :

- je choisis d'abord une **paire** $\{c_1, c_2\}$ de boîtes dans C $\rightsquigarrow \binom{4}{2} = 6$ possibilités.
- je choisis ensuite une manière de ranger les boules dans ces deux boîtes, de sorte qu'aucune ne soit laissée vide. Un tel rangement correspond à partitionner B en deux parties non vides. Il y a 2^5 partitions ordonnées de B, dont deux ne nous conviennent pas : $(B, \emptyset)$ et $(\emptyset, B)$. $\rightsquigarrow 2^5 - 2 = 30$ possibilités.

Au total, $\mathsf{Card}\ A_2 = 180$, et par conséquent $p(A_2) = \dfrac{180}{1024} = \dfrac{45}{256}$ ▲

c. Soit A_3 l'événement "*exactement trois boîtes sont occupées*". Pour dénombrer A_3, je raisonne comme précédemment :

- je choisis d'abord trois boîtes $\{c_1, c_2, c_3\}$ dans C $\rightsquigarrow \binom{4}{3} = 4$ possibilités.
- je choisis ensuite une manière de ranger les boules dans ces trois boîtes, de sorte qu'aucune ne soit laissée vide. Comme je dois mettre au moins une boule dans chaque boîte il y a deux cas possibles :
  - soit une case contient trois boules :
    - je choisis la boîte contenant trois boules $\rightsquigarrow \binom{3}{1} = 3$ possibilités.
    - je choisis les trois boules qui sont rangées ensemble $\rightsquigarrow \binom{5}{3} = 10$ possibilités.
    - je choisis une boule qui sera rangée seule $\rightsquigarrow \binom{2}{1} = 2$ possibilités.
    - je choisis la dernière boule qui sera rangée seule $\rightsquigarrow \binom{1}{1} = 1$ possibilités.

    Au total, il y a 60 possibilités de ranger 5 boules dans trois boîtes discernables de sorte qu'une boîte contient trois boules, les autres cases contenant chacune une seule boule.
  - soit deux cases contiennent deux boules :
    - je choisis les deux boîtes qui contiennent deux boules chacune $\rightsquigarrow \binom{3}{2} = 3$ possibilités.
    - je choisis une paire de boules pour la première de ces 2 boîtes $\rightsquigarrow \binom{5}{2} = 10$ possibilités.
    - je choisis une autre paire de boules pour la deuxième de ces 2 boîtes $\rightsquigarrow \binom{3}{2} = 3$ possibilités.
    - je choisis la dernière boule qui sera rangée seule $\rightsquigarrow \binom{1}{1} = 1$ possibilités.

[1] les boîtes

Au total, il y a 90 façons de ranger 5 boules dans trois boîtes discernables de sorte que deux de ces boîtes contiennent chacune 2 boules et la dernière contient une boule.

Finalement lorsque trois boîtes sont données, il y a $60 + 90 = 150$ façons de les remplir avec 5 boules de sorte qu'aucune des boîtes ne soit laissée vide.

Il y a donc $4 \times 150 = 600$ rangements possibles des 5 boules dans trois des cinq boîtes.

Par conséquent $$p(A_3) = \frac{600}{1024} = \frac{75}{128}$$ ▲

3. Soit A l'événement "*aucune boîte n'est laissée vide*". L'événement contraire $\bar{A}$ consiste donc en les rangements tels qu'une case au moins soit laissée vide. Avec les notations précédentes, nous pouvons donc écrire :

$$\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

Cette réunion étant disjointe, il vient par additivité finie :

$$p(\bar{A}) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = \frac{1 + 45 + 150}{256} = \frac{196}{256} = \frac{49}{64}$$

Finalement nous déduisons de ce qui précède que $$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{15}{64}$$ ▲

Remarque : On peut remarquer qu'un rangement est une application de $\mathbb{F}_5$ vers $\mathbb{F}_4$. Un rangement pour lequel aucune case n'est laissée vide est une application surjective de $\mathbb{F}_5$ sur $\mathbb{F}_4$. Or le nombre[2] de surjections de $\mathbb{F}_5$ sur $\mathbb{F}_4$ est $\mathfrak{S}(5, 4) = 240$. On en déduit directement que la probabilité qu'aucune case ne soit laissée vide est $p(\bar{A}) = \frac{240}{1024} = \frac{15}{64}$...

Exercice 4 : tirages successifs

Soient n, p des entiers naturels tels que $2 \leq p \leq n$. Une urne $\mathcal{U}$ contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages aléatoires *successifs* d'une boule dans l'urne. Pour tout entier $k \in [\![1; p]\!]$, on note N_k le numéro de la boule obtenue au k ième tirage.

1. Les tirages s'effectuent *avec remise* : un résultat possible est donc une p liste d'éléments de $\mathcal{U}$. Par conséquent , notons $\Omega = \mathcal{U}^p$ l'univers des possibles. Les tirages s'effectuant au hasard, Ω is endowed with uniform probability.

$$\mathsf{Card}\ \ \Omega = n^p$$

a. Notonts A l'événement "*les numéros des boules tirées sont tous différents*". Un cas favorable est un arrangement de p boules de $\mathcal{U}$. D'où $\mathsf{Card}\ \ A = A_n^p$.

Par conséquent $$p(A) = \frac{\mathsf{Card}\ \ A}{\mathsf{Card}\ \ \Omega} = \frac{A_n^p}{n^p}$$ ▲

b. Notons B l'événement "*deux boules tirées au moins ont le même numéro*". D'après les propriétés générales des probabilités,

$$p(B) = 1 - p(\bar{B})$$

Or $\bar{B}$ est l'événement *il n'existe pas deux boules portant le même numéro*. Autrement dit $\bar{B} = A$.

D'après la formule ci-dessus et la question précédente, il vient : $$p(B) = 1 - \frac{A_n^p}{n^p}.$$ ▲

c. Notons C l'événement "*exactement deux boules tirées ont le même numéro*". Pour dénombrer C, je procède par étapes :

- je choisis tout d'abord les rangs des tirages répétés $\rightsquigarrow \binom{p}{2}$ possibilités.
- je choisis ensuite le numéro de la boule répetée $\rightsquigarrow \binom{n}{1} = n$ possibilités.
- je complète ensuite ma liste avec un arrangement de $p-2$ numéros choisis parmi les $n-1$ restants $\rightsquigarrow A_{n-1}^{p-2}$ possibilités.

Au total, nous obtenons :

$$\mathsf{Card}\ \ C = \binom{p}{2} \times n \times A_{n-1}^{p-2} = n\ p\ (p-1)A_{n-1}p - 2$$

Par conséquent $$p(C) = \frac{n\ p\ (p-1)A_{n-1}^{p-2}}{n^p} = \frac{p\ (p-1)A_{n-1}^{p-2}}{n^{p-1}}$$ ▲

[2]cf la table des $\mathfrak{S}(p, n)$ écrite dans le DL2

d. Notons D l'événement "*il existe* $i \in [\![1;p-1]\!]$, *tel que* $N_i \geq N_{i+1}$ ". L'événement contraire de D est l'ensemble des tirages pour lesquels $\forall i \in [\![1;p-1]\!],\ N_i < N_{i+1}$, c'est-à-dire les tirages dont les termes forment une suite strictement croissante. Par conséquent, nous pouvons *identifier* $\bar{D}$ à l'ensemble des parties de $\mathcal{U}$ à p éléments. Il en résulte que $\mathsf{Card}\ \bar{D} = \binom{n}{p}$.

Finalement , par les propriétés générales des probabilités, $\quad p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - \dfrac{\binom{n}{p}}{n^p}$. ▲

e. Soit $i \in [\![1;p]\!]$ fixé. Notons E_i l'événement "$N_i = i$". Ω peut-être vu comme l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_n$. Suivant cette interprétation, E_i correspond aux applications $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_n$ telles que $f(i) = i$. Pour dénombrer E_i je procède par étapes :

- je choisis l'image de i par f $\quad\rightsquigarrow$ 1 possibilité.
- je choisis les images des autres éléments de $\mathbb{F}_p$. Un tel choix revient à choisir une application de $\mathbb{F}_p \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{F}_n$. Par conséquent $\quad\rightsquigarrow n^{p-1}$ possibilités.

Fianlement $\qquad \mathsf{Card}\ E_i = n^{p-1}$ et par conséquent $\qquad p(E_i) = \dfrac{n^{p-1}}{n^p} = \dfrac{1}{n}$ ▲

Remarque : Ce résultat est tout à fait naturel : les tirages étant équiprobables, il y a autant de chances pour que $f(i) = 1, f(i) = 2, \ldots, f(i) = i, \ldots, f(i) = n$.

f. Soient $i, j \in [\![1;p]\!]$ fixés. Notons $E_{i,j}$ l'événement "$N_i = i$ *et* $N_j = j$ ". Comme précédemment, les images de i et de j étant uniquement détérminées, une application de $E_{i,j}$ est uniquement déterminée par sa restriction à $\mathbb{F}_p \setminus \{i, j\}$.

Par conséquent $\qquad \mathsf{Card}\ E_{i,j} = n^{p-2} \qquad$ et $\qquad p(E_{i,j} = \dfrac{n^{p-2}}{n^p} = \dfrac{1}{n^2}$. ▲

g. Notons F l'événement "*il existe au moins un entier* $k \in [\![1;p]\!]$ *tel que* $N_k = k$ ".

Nous pouvons exprimer F comme la réunion des E_i pour i variant de 1 à p : $\quad F = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} E_i$

Cette réunion n'étant pas disjointe, nous utilisons la formule de Poincaré pour les probabilités, il vient

$$p(F) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} p\big(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}\big)$$

Considérons à présent $(i_1, \ldots, i_k)$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{F}_p$ fixée.

Pour déterminer la probabilité de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}$, remarquons qu'une application application appartenant à cette ensemble est entièrement déterminée par la donnée de sa restriction à $\mathbb{F}_p \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ puisque les images des éléments de $\{i_1, \ldots, i_k\}$ sont déjà fixées. Autrement dit, $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}$ est en bijection avec l'ensemble des applications de $\mathbb{F}_{p_k}$ vers F_n.

Il en résulte que $\qquad \mathsf{Card}\ E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} = n^{p-k}$ et par conséquent que $p\big(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}\big) = \dfrac{1}{n^k}$.

Réinjectons ces résultats dans la formule de Poincaré, il vient :

$$\begin{aligned} p(F) &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} p\big(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}\big) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \frac{1}{n^k} \mathsf{Card}\ \{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{F}_p^k \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p\} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n^k} \end{aligned}$$

▲

2. On suppose maintenant que les tirages successifs s'effectuent *sans remise*. Un résultat possible est donc un arrangement de p boules de $\mathcal{U}$. Par conséquent l'univers des possibles est $\Omega = \mathscr{A}(p, \mathcal{U})$. Comme $n \geq p$ par hypothèse, Ω est non vide. Enfin, les tirages se faisant au hasard, nous munissons Ω de la probabilité uniforme.

$$\mathsf{Card}\ \Omega = A_n^p$$

a. Soit $i \in [\![1;p]\!]$ fixé. Notons E_i l'événement "$N_i = i$ ". Comme nous l'avons remarqué précédemment une application élément de E_i est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathbb{F}_p \setminus \{i\}$. Dans notre nouveau modèle cependant, les éléments de E_i sont des applications injectives, la restriction d'une telle application à $\mathbb{F}_p \setminus \{i\}$ est en conséquence une injection de à $\mathbb{F}_p \setminus \{i\}$ dans à $\mathbb{F}_n \setminus \{i\}$. Comme $n \geq p$ par hypothèse le cardinal de $\mathbb{F}_n \setminus \{i\}$ est $n-1$.

Ainsi $$p(E_i) = \frac{A_{n-1}^{p-1}}{A_n^p} = \frac{1}{n}.$$ ▲

b. Soient $i, j \in [\![1;p]\!]$ fixés. Notons $E_{i,j}$ l'événement "$N_i = i$ *et* $N_j = j$". Comme précédemment, $E_{i,j}$ est en bijection avec l'ensemble des applications injectives de $\mathbb{F}_p \setminus \{i,j\}$ vers $\mathbb{F}_n \setminus \{i,j\}$.

Nous en déduisons : $$p(E_{i,j}) = \frac{A_{n-2}^{p-2}}{A_n^p} = \frac{1}{n\ (n-1)}.$$ ▲

c. Notons F l'événement "*il existe au moins un entier* $k \in [\![1;p]\!]$ *tel que* $N_k = k$ ". F est la réunion des E_i pour i variant de 1 à p. Par conséquent, d'après la formule de Poincaré, nous avons

$$\begin{aligned}
p(F) &= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} p\big(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}\big) = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} \frac{A_{n-k}^{p-k}}{A_n^p} \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{(n-k-p+k)!} \times \frac{n-p}{n!} \times \mathsf{Card}\ \{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{F}_p^k \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p\} \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \times \binom{p}{k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} \frac{p!\ (n-k)!}{k!\ (p-k)!}
\end{aligned}$$

▲

Exercice 5 : Tirages simultanés

Une grille de loto comporte 49 numéros de 1 à 49. Le jeu consiste à cocher 6 cases parmi les 49. Un résultat possible est donc une partie à 6 éléments de $\mathbb{F}_{49}$. Autrement dit l'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \mathscr{C}(6, \mathbb{F}_{49})$. Comme le tirage se fait au hasard, $^{O}mega$ est muni de la probabilité uniforme. Nous aurons besoin de connaître le cardinal de Ω :

$$\mathsf{Card}\ \ \Omega = \binom{49}{6}$$

1. Soit A l'événement "*le plus grand numéro sorti est inférieur ou égal à 45*". C'est ce que l'on appelle l'événement *primitif* que les puristes prennent garde de bien distinguer de la partie A correspondante dans le modèle choisi ... Mais laissons de côté ces subtilités. Un résultat favorable est une partie de $\mathbb{F}_{49}$ qui ne contient que des numéros inférieurs à 45. Il s'agit donc du choix de 6 éléments de $\{1, 2 \ldots, 45\}$. Par conséquent $A = \mathscr{C}(6, 45)$.

D'où $\mathsf{Card}\ \ A = \binom{45}{6}$ et par conséquent $$p(A) = \frac{\mathsf{Card}\ \ A}{\mathsf{Card}\ \ \Omega} = \frac{\binom{45}{6}}{\binom{49}{6}}.$$ ▲

2. Soit B- l'événement "*le plus grand numéro sorti est 45* " Un résultat favorable doit nécéssairement contenir 45. Les autres numéros sont donc inférieurs à 44 (le tirage s'effectuant sans remise...). Ainsi, un résultat favorable est entièrement déterminé par la donnée de 5 numéros inférieurs à 45. D'où $B = \mathscr{C}(5, \mathbb{F}_{44})$.

Par conséquent $\mathsf{Card}\ \ B = \binom{44}{5}$ d'où je déduis $$p(B) = \frac{\mathsf{Card}\ \ B}{\mathsf{Card}\ \ \Omega} = \frac{\binom{44}{5}}{\binom{49}{6}}.$$ ▲

3. Soit C- l'événement "*le joueur a coché au moins trois bons numéros* " Un tirage avec au moins...Un rapide calcul montre que pour dénombrer C, il est plus avantageux pour moi de dénombrer le complémentaire de C. $\bar{C}$ est l'ensemble des grilles contenant au plus 2 bons numéros. Je distingue trois cas suivant que la grille contient 2 bons numéros, 1 bon numéro ou aucun bon numéro :

- Soit $\tilde{C}_0$ l'événement la grille ne contient aucun bon numéro. Comme il y a 6 bons numéros, un cas *favorable* pour $\tilde{C}_0$ correspont au choix de 6 numéros parmi les 43 *mauvais numéros.*

  Par conséquent $$\mathsf{Card}\ \ \tilde{C}_0 = \binom{43}{6}$$

- Soit $\tilde{C}_1$ l'événement la grille contient 1 bon numéro. Pour dénombrer $\tilde{C}_1$ je raisonne par étapes :
  - je choisis le bon numéro parmi les 6 bons numéros , $\rightsquigarrow \binom{6}{1} = 6$ possibilités.
  - je choisis les 5 derniers numéros parmi le 43 mauvais numéros $\rightsquigarrow \binom{43}{5}$ possibilités.

  Au total, $$\mathsf{Card}\ \ \tilde{C}_1 = 6 \times \binom{43}{5}$$

- Soit $\tilde{C}_2$ l'événement la grille contient 2 bons numéros. Pour dénombrer $\tilde{C}_2$ je raisonne par étapes :
  - je choisis les 2 bons numéros parmi les 6 bons numéros , $\rightsquigarrow \binom{6}{2} = 15$ possibilités.
  - je choisis les 4 derniers numéros parmi le 43 mauvais numéros $\rightsquigarrow \binom{43}{4}$ possibilités.

  Au total, $$\mathsf{Card}\ \tilde{C}_2 = 15 \times \binom{43}{4}$$

Comme $\bar{C}$ peut s'écrire comme la réunion disjointe $\bar{C} = \tilde{C}_0 \cup \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$, il résulte de l'additivité de Card que :

$$\mathsf{Card}\ C = \mathsf{Card}\ \Omega - \mathsf{Card}\ \tilde{C}_0 + \mathsf{Card}\ \tilde{C}_1 + \mathsf{Card}\ \tilde{C}_2$$

D'où je tire finalement $$p(C) = 1 - \frac{\binom{43}{6} + 6 \times \binom{43}{5} + 15 \times \binom{43}{4}}{\binom{49}{6}}.$$ ▲

4. Soit D- l'événement "*la somme des numéros obtenus est impaire*" Attention, il n'y a pas autant de nombres pairs que de nombres impairs entre 1 et 49 ! En fait, si nous notons $\mathcal{I}$ le sous-ensemble de $\mathbb{F}_{49}$ formé uniquement des nombres impairs, et $\mathcal{P}$ le sous-ensemble de $\mathbb{F}_{49}$ formé uniquement des nombres pairs, nous avons

$$\mathsf{Card}\ \mathcal{I} = 25 \text{ tandis que } \mathsf{Card}\ \mathcal{P} = 24$$

Pour dénombrer D, je discute suivant le nombre de nombres impairs qui apparaissent dans la grille. Pour que la somme des numéros soit impaire il n'y a que trois possibilités :

- Soit D_1 l'événement la grille contient exactement 1 nombre impair. Pour dénombrer D_1, je raisonne par étapes :
  - je choisis un élément de $\mathcal{I}$ $\rightsquigarrow \binom{25}{1} = 25$ possibilités.
  - je choisis 5 éléments dans $\mathcal{P}$ $\rightsquigarrow \binom{24}{5}$ possibilités.

  Au total $$\mathsf{Card}\ D_1 = 25 \times \binom{24}{5}$$
- Soit D_3 l'événement la grille contient exactement 3 nombres impairs. Pour dénombrer D_3, je raisonne par étapes :
  - je choisis 3 éléments de $\mathcal{I}$ $\rightsquigarrow \binom{25}{3}$ possibilités.
  - je choisis 3 éléments dans $\mathcal{P}$ $\rightsquigarrow \binom{24}{3}$ possibilités.

  Au total $$\mathsf{Card}\ D_3 = \binom{25}{3} \times \binom{24}{3}$$
- Soit D_5 l'événement la grille contient exactement 5 nombres impairs. Pour dénombrer D_5, je raisonne par étapes :
  - je choisis 5 éléments de $\mathcal{I}$ $\rightsquigarrow \binom{25}{5}$ possibilités.
  - je choisis 1 éléments dans $\mathcal{P}$ $\rightsquigarrow \binom{24}{1}$ possibilités.

  Au total $$\mathsf{Card}\ D_5 = \binom{25}{5} \times \binom{24}{1}$$

Comme D peut s'écrire comme la réunion disjointe $D_1 \cup D_3 \cup D_3$, il résulte de l'additivité de Card que

$$\mathsf{Card}\ D = \mathsf{Card}\ D_1 + \mathsf{Card}\ D_3 + \mathsf{Card}\ D_5$$

En divisant cette égalité par $\mathsf{Card}\ \Omega$, j'obtiens $p(D) = \dfrac{25 \times \binom{24}{5} + \binom{25}{3} \times \binom{24}{3} + \binom{25}{5} \times \binom{24}{1}}{\binom{49}{6}}$ ▲

5. Soit E- l'événement "*le tirage a donné six entiers non consécutifs* ". Convenons de noter $\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ une grille de E, avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_6$. Comme nous l'avons vu en séance d'exercice une telle grille laisse automatiquement une case libre entre une case cochée et la suivante dans l'ordre croissant, i.e. $\forall k \in [\![1, 5]\!]$, $a_{k+1} > a_k + 1$. Ainsi, puisque cette grille contient 6 cases cochées, 5 cases seront automatiquement inoccupées. L'application bijective $\tau : \mathbb{F}_{49} \to \mathbb{F}_{44}$ définie par $\forall k \in [\![1, 6]\!]$ $\tau(k) = a_k - (k - 1)$ permet de *regrouper* ces cases vides en fin de grille.

Par conséquent $\mathsf{Card}\ E = \binom{44}{6}$, d'où je tire $$p(E) = \frac{\mathsf{Card}\ E}{\mathsf{Card}\ \Omega} = \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}}.$$ ▲

Exercice 6 : untitled

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Deux personnes choisissent au hasard et indépendamment l'une de l'autre une partie de E. Comme les personnes choisissent ces parties indépendamment l'une de l'autre, il peut y avoir répétition. Un résultat possible est donc un couple (A, B) de parties de E. Par conséquent $\Omega = \mathscr{P}(E)^2$. De plus le tirage se fait au hasard, donc j'équipe Ω de la probabilité uniforme :

$$\mathsf{Card}\ \Omega = (2^n)^2 = 4^n.$$

a. Notons D l'événement : "*les parties A, B ainsi choisies sont disjointes*". Pour dénombrer D, je souhaite procéder par étapes :

- je vais choisir $A \in \mathscr{P}(E)$. J'ai 2^n possibilités pour ce choix.
- puis je vais choisir B. Pour être sûr que $A \cap B = \emptyset$, je ne peux pas choisir B n'importe comment...B doit être choisi dans le complémentaire de A. i.e. $B \in \mathscr{P}(\complement_E A)$.

Big Soucy ! le nombre de possibilités pour le choix de B **dépend du résultat de la première étape**. Plus précisément, une fois que A a été choisi, j'ai $\mathsf{Card}\ \left(\mathscr{P}(\complement_E A)\right) = 2^{\mathsf{Card}\ \complement_E A}$ possibilités pour le choix de B. Comme vous le savez, on ne peut pas multiplier le nombre de possibilités à chaque étape en ce cas.

Pour résoudre cette difficulté, je vais **discuter**[3] suivant la valeur $k \in [\![0, n]\!]$ du cardinal de A. Fixons donc un tel k. Je raisonne par étapes :

- je choisis une partie $A \in \mathscr{P}(E)$ de cardinal k $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités.
- je choisis une partie B dans le complémentaire de A $\rightsquigarrow 2^{n-k}$ possibilités.

Summing up over k yields :

$$\mathsf{Card}\ D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^{n-k} = (2+1)^n = 3^n,$$

d'après la formule du binôme de Newton.

Finalement, en divisant par $\mathsf{Card}\ \Omega$ j'obtiens : $$p(D) = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$ ▲

b. Notons R l'événement *les parties (A,B) ainsichoisies recouvrent E* ". Pour dénombrer R, je remarque que :

$$\begin{array}{rccc} \textit{involution}\ : & R & \to & D \\ & (A, B) & \mapsto & (\complement_E A, \complement_E B) \end{array}$$

est bien définie car :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2, \big(A \cup B = E \iff \complement_E A \cap \complement_E B = \emptyset\big).$$

De plus, comme son nom le laisse supposer cette application est involutive, i.e. $\textit{involution} \circ \textit{involution} = Id$. En particulier elle est bijective. Par conséquent les événements D et R ont même cardinal. Comme Ω est muni de la probabilité uniforme, il en résulte que cs événements sont équiprobables.

Par conséquent $$p(R) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$ ▲

2. Une troisième personne vient jouer dans les mêmes conditions. De manière analogue à la question 1, notons $\Omega = \mathscr{P}(E)^3$ l'univers des possibles. Ω est muni de la probabilité uniforme :

$$\mathsf{Card}\ \Omega = \big(2^n\big)^3 = 8^n$$

a. Notons D_2 l'événement "*les 3 parties A, B, C ainsi choisies soient 2 à 2 disjointes*". On cherche donc la probabilité pour que $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$.

Pour dénombrer D_2, je discute suivant la valeur $k \in [\![0, n]\!]$ du cardinal de A :

- je choisis tout d'abord une partie A de E de cardinal k $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités.
- je choisis ensuite le couple (B, C). Comme par hypothèse $B \cap A = C \cap A = \emptyset$, ces deux parties doivent être choisies dans le complémentaire de A. Mais ce n'est pas tout : il faut aussi que $B \cap C = \emptyset$. Par conséquent (B, C) est un couple de parties disjointes de $\complement_E A$. Je peux alors utiliser les résultats de la première question (dénombrement de D) , j'obtiens $\rightsquigarrow 3^{n-k}$ possibilités.

Finalement en sommant sur $k \in [\![0, n]\!]$, j'obtiens

$$\mathsf{Card}\ D_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = (1+3)^n = 4^n$$

En divisant par $\mathsf{Card}\ \Omega$, il vient $$p(D_2) = \frac{4^n}{8^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$ ▲

[3]donc un $\sum$ à la fin...

b. Notons D_3 l'événement "*les 3 parties A, B, C ainsi choisies soient disjointes, i.e. $A \cap B \cap C = \emptyset$*". A la différence de la question précédente, les parties A, B, C peuvent *s'intersecter 2 à 2*. Pour dénombrer D_3 je souhaite procéder par étapes :

- je choisis tout d'abord une partie A de E de cardinal k $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités.
- je choisis ensuite le couple (B, C). La condition $A \cap B \cap C = \emptyset$ peut être vue, par associativité de $\cap$ comme $A \cap (B \cap C) = \emptyset$. Je cherche donc à dénombrer les couples (B, C) tels que leur intersection ne rencontre pas A. Notons D leur intersection. Pour dénombrer l'ensemble des couples (B, C), je procède par étapes :
  - ↻ je choisis d'abord une partie D de E qui ne rencontre pas A. La partie D est donc choisie dans le complémentaire de A $\rightsquigarrow 2^{n-k}$ possibilités.
  - ↻ A présent je choisis le couple (B, C) de parties telles que $B \cap C = D$. Puisque la partie B contient D, je peux écrire $B = D \cup B_1$, avec $B_1 \in \mathscr{P}(\complement_E D)$. De même C s'écrit de manière unique sous la forme $C = D \cup C_1$ avec $C_1 \in \mathscr{P}(\complement_E D)$. Ainsi, il y a autant de manières de construire le couple (B, C) que de manières de construire le couple (B_1, C_1). Or la condition $B \cap C = D$ se traduit par $B_1 \cap C_1 = \emptyset$. Par conséquent, le couple (B_1, C_1) est un couple de parties **disjointes** de $\complement_E D$. D'après les résultats de la question **1.**, il y a $3^{\mathsf{Card}\ \complement_E D}$ façons de construire un tel couple.

  Big Soucy : le nombre de façons de construire le couple (B_1, C_1) [4] dépend du $\mathsf{Card}\ \complement_E D$. C'est-à-dire que le nombre de possibilités à cette étape du raisonnement **dépend du résultat de l'étape précédente**.

  Par conséquent, nous devons reprendre les étapes ↻, en discutant suivant la valeur $j \in [\![1, n-k]\!]$ du cardinal de D !!

  - je choisis tout d'abord une partie D de E de cardinal j qui ne rencontre pas A. La partie D est donc une partie à j éléments du complémentaire de A dans E $\rightsquigarrow \binom{n-k}{j}$ possibilités.
  - je choisis le couple (B, C). Ainsi que nous l'avons démontré plus haut, un choix pour le couple (B, C) de parties de E telles que $B \cap C = D$ correspond au choix d'un couple $B_1, C_1)$ de parties disjointes de $\complement_E D$. D'après les résultats de la question **1.**, il vient $\rightsquigarrow 3^{n-j}$ possibilités.

  Au total, **la partie A étant fixée de cardinal** $k \in [\![0, n]\!]$, le nombre de façons pour construire le couple (B, C) est :

$$\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 3^{n-j} = 3^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 3^{n-k-j} = 3^k \times (1+3)^{n-k} = 3^k \times 4^{n-k}$$

Finalement, en sommant à présent sur k nous en déduisons

$$\mathsf{Card}\ D_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 3^{n-j} \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \times 4^{n-k} = (3+4)^n = 7^n$$

En divisant par $\mathsf{Card}\ \Omega$, il vient $$p(D_3) = \frac{7^n}{8^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$ ▲

c. Notons R_3 l'événement "*les parties recouvrent E, i.e. $A \cup B \cup C = E$* ". Pour dénombrer R_3 je remarque que l'application

$$involution_3 : \begin{array}{ccc} R_3 & \to & D_3 \\ (A, B, C) & \mapsto & (\complement_E A, \complement_E B, \complement_E C) \end{array}$$

est une bijection involutive de R_3 sur D_3. Par conséquent les événements R_3 et D_3 sont équiprobables, il en résulte que $$p(R_3) = \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$ ▲

Exercice 7 : Avec et sans remise

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules en remettant la boule dans l'urne après le tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche.On cherche la probabilité de tirer exactement une boule blanche au cours des n tirages. Un résultat possible est une n-liste de couleurs. Par conséquent, notons

[4] et donc le couple (B, C)

$\Omega = \{blanc,\ rouge\}^n$. Comme les tirages se font tantôt avec remise, tantôt sans remise, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.
Notons B l'événement "*une boule blanche exactement est sortie au cours des n tirages*". On cherche $p(B)$.
Notons aussi, pour $k \in [\![1,n]\!]$ R_k l'événement "*le $k^{\text{ième}}$ tirage a donné une boule rouge*" et B_k l'événement "*le $k^{\text{ième}}$ tirage a donné une boule blanche*" .

- L'événement B peut se décomposer en n événements 2 à 2 incompatibles suivant le numéro du tirage qui a donné la boule blanche. Autrement dit $B = \bigcup_{k=1}^n B \cap B_k$. D'après la propriété d'additivité finie des probabilté (cas particulier de la formule de Poincaré), il vient :

$$(1) \qquad p(B) = p\left(\bigcup_{k=1}^n B \cap B_k\right) = \sum_{k=1}^n p(B \cap B_k).$$

- Pour $k \in [\![1,n]\!]$ fixé, calculons la probabilité de $B \cap B_k$.
Pour ce faire, remarquons que $B \cap B_k = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cdots \cap R_n$. Pour calculer la probabilité de cette intersection, utilisons la formule des probabilités composées. Sous réserve que les conditions soient non négligeables[5], écrivons :

$$\begin{aligned} p(B \cap B_k) &= p(R_1) \times p(R_2|R_1) \times \cdots \times p(R_{k-1}|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-2}) \\ &\times p(B_k|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}) \\ &\times p(R_{k+1}|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k) \times \cdots \times p(R_n|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_{n-1}). \end{aligned}$$

  - Examinons le facteur $p(R_1)$. Comme l'urne se compose de b boules blanches et de r boules rouges, on calcule facilement
$$p(R_1) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{r}{b+r}.$$

    Remarque : En particulier $p(R_1) > 0$, ce qui justifie le calcul suivant.

    Calculons ensuite $p(R_2|R_1)$. On suppose que la première boule tiré est de couleur rouge. Conformément au *protocole* de tirage, la boule rouge a été remise dans l'urne. Ainsi, au *moment* du deuxième tirage, l'urne se compose toujours de b boules blanches et de r boules rouges. Par conséquent
$$p(R_2|R_1) = \frac{r}{b+r}.$$

    Remarque : En particulier $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p(R_2|R_1) > 0$, ce qui justifie les calculs suivants.

    De la même manière -on remarque que la composition de l'urne est inchangée- nous obtenons
$$p(R_3|R_1 \cap R_2) = \cdots = p(R_{k-1}|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-2}) = \frac{r}{b+r}$$

    Remarque : On en déduit comme précédemment que $p(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-2} \cap R_{k-1}) > 0$, ce qui justifie le calcul suivant.

  - Examinons le facteur de la deuxième ligne dans la formule ci-dessus. On suppose que les $k-1$ premières boules sont de couleur rouge. Par conséquent, lors du $k^{\text{ième}}$ tirage, l'urne se compose encore de r boules rouges et de b boules blanches. Ainsi :
$$p(B_k|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{b}{b+r}.$$

    Remarque : On en déduit comme précédemment que $p(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-2} \cap R_{k-1} \cap B_k) > 0$, ce qui justifie les calculs suivants.

  - Examinons les facteurs de la dernière ligne. Le $k^{\text{ième}}$ tirage a donné une boule de couleur blanche. Suivant la méthode de tirage, cette boule n'est pas remise dans l'urne : ainsi pour calculer les probabilités qui interviennent dans la dernière ligne, nous supposons que l'urne se compose de r boules rouges et de $b-1$ boules blanches. Nous obtenons alors
$$p(R_{k+1}|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k) = \cdots = p(R_n|R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_{n-1}) = \frac{r}{b+r-1}$$

    Au final, nous obtenons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$
$$p(B \cap B_k) = \left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1} \times \left(\frac{b}{b+r}\right) \times \left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-k}$$

[5] On vérifie au fil de la démonstration que c'est bien le cas

- Réinjectons les valeurs obtenues pour $p(B\cap B_k)$ dans l'équation (1), il vient :

$$\begin{aligned}
p(B) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1}\times\left(\frac{b}{b+r}\right)\times\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-k} = \frac{r^{n-1}\,b}{(b+r-1)^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b+r}\right)^{k}\times\left(\frac{1}{b+r-1}\right)^{-k}\\
&= \frac{r^{n-1}\,b}{(b+r-1)^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^{k} = \frac{r^{n-1}\,b}{(b+r-1)^n}\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^{k}\\
&= \frac{r^{n-1}\,b}{(b+r-1)^n}\times\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)\times\frac{1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^n}{1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)} = b\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-1}\times\left\{1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^n\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons obtenu $\quad p(B)=b\left(\dfrac{r}{b+r-1}\right)^{n-1}\times\left\{1-\left(\dfrac{b+r-1}{b+r}\right)^n\right\}.$ ▲

Remarque : A propos des *ce qui justifie les calculs suivants...*
Il s'agit de vérifier à chaque étape du calcul que le prochain conditionnement est non négligeable. La rédaction présentée ici est un peu fastidieuse. C'est pourtant ce qu'il faut faire en toute rigueur. Je pense qu'une rédaction acceptable consiste à dire en début de calcul, ou à la fin plutôt du calcul, *une fois pour toutes* une phrase du genre "A chaque étape du calcul on vérifie que les conditionnement successifs sont non négligeables". Une simple phrase comme celle-ci vous vaudra la sympathie du correcteur...Ça aussi c'est non-négligeable !

Exercice 8 : la pêche aux canards

On considère 3 bassins A_1, A_2 et A_3 contenant des petits canards de couleurs jaune ou orange.La composition des bassins est la suivante :

$$A_1\ \textit{contient}\left\{\begin{array}{l}2\ \textit{jaunes}\\ 3\ \textit{oranges}\end{array}\right.\quad A_2\ \textit{contient}\left\{\begin{array}{l}1\ \textit{jaune}\\ 4\ \textit{oranges}\end{array}\right.\quad A_3\ \textit{contient}\left\{\begin{array}{l}3\ \textit{jaunes}\\ 4\ \textit{oranges}\end{array}\right.$$

On pêche un canard dans le bassin A_1, un autre dans A_2 et on les met dans le troisième bassin.
Un résultat possible de cette expérience est un petit canard de couleur jaune ou orange. Je *modélise* ceci en ne retenant que la couleur. $\Omega=\{orange,\ jaune\}$. Dans ce modèle, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.
Définissons quelques événements importants pour *probabiliser* Ω. Convenons de noter pour i=1,2 ou 3

- O_i l'événement "*je pêche un petit canard* ***Orange*** *dans le bassin* A_i"
- J_i l'événement "*je pêche un petit canard* ***Jaune*** *dans le bassin* A_i"

Nous pouvons représenter ceci dans un arbre :

Ω

O_1 $\qquad\qquad$ O_1

O_2 $\quad$ J_2 $\quad$ O_2 $\quad$ J_2

O_3 $\quad$ J_3 $\quad$ O_3 $\quad$ J_3 $\quad$ O_3 $\quad$ J_3 $\quad$ O_3 $\quad$ J_3

On remarque que la connaissance des résultats des pêches dans les deux premiers bassins *conditionnent* les résultats de la pêche dans le troisième bassin. Autrement dit, la probabilité sur Ω est définie de manière implicite par la donnée des probabilités des quatre événements $O_1\cap O_2$, $O_1\cap J_2$ $J_1\cap O_2$ et $J_1\cap J_2$, qui forment un système complet d'événements. Pour calculer ces probabilités, remarquons que le résultat de la pêche dans le bassin A_1 n'influe en rien sur le résultat de la pêche dans A_2. Autrement dit, les événements O_1 et O_2. Comme nous l'avons vu en cours cela suffit pour garantir que O_1 et $\bar{O}_2=J_2$ sont aussi indépendants. Par conséquent la probabilité sur Ω est définie *via* la formule des probabilités totales et la donnée de :

- $p(O_1\cap O_2)=p(O_1)\times p(O_2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{25}$
- $p(O_1\cap J_2)=p(O_1)\times p(J_2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{25}$
- $p(J_1\cap O_2)=p(J_1)\times p(O_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{25}$
- $p(J_1\cap J_2)=p(J_1)\times p(J_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{25}$

Il s'agit de calculer la probabilité de O_1 sachant J_3. Par définition, nous avons :

$$p(O_1|J_3)=\frac{p(O_1\cap J_3)}{p(J_3)}$$

- Calcul de $p(J_3)$.

  Ecrivons avec la formule des probabilités totales

$$\begin{array}{rcl} p(J_3) & = & p(J_3 \cap O_1 \cap O_2) + p(J_3 \cap O_1 \cap J_2) + p(J_3 \cap J_1 \cap O_2) + p(J_3 \cap J_1 \cap J_2) \\ & = & p(O_1 \cap O_2) \times p(J_3|O_1 \cap O_2) + p(O_1 \cap J_2) \times p(J_3|O_1 \cap J_2) \\ & & \quad + \quad p(J_1 \cap O_2) \times p(J_3|J_1 \cap O_2) + p(J_1 \cap J_2) \times p(J_3|J_1 \cap J_2) \\ & = & \dfrac{12}{25} \times \dfrac{3}{9} + \dfrac{3}{25} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{25} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{25} \times \dfrac{5}{9} \\ & = & \dfrac{36+12+32+10}{225} = \dfrac{90}{225} = \dfrac{6}{15} \end{array}$$

- Calcul de $p(O_1 \cap J_3)$

  Ecrivons la formule des probabilités totales pour le systèmes complet (O_2, J_2), il vient :

$$\begin{array}{rcl} p(J_3 \cap O_1) & = & p(J_3 \cap O_1 \cap O_2) + p(J_3 \cap O_1 \cap J_2) \\ & = & p(O_1 \cap O_2) \times p(J_3|O_1 \cap O_2) + p(O_1 \cap J_2) \times p(J_3|O_1 \cap J_2) \\ & = & \dfrac{12}{25} \times \dfrac{3}{9} + \dfrac{3}{25} \times \dfrac{4}{9} \\ & = & \dfrac{36+12}{225} = \dfrac{48}{225} = \dfrac{16}{75}. \end{array}$$

  Finalement, nous avons $$p(O_1|J_3) = \frac{p(O_1 \cap J_3)}{p(J_3)} = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{6}{15}} = \frac{8}{15}.$$ ▲