Corrigé du Devoir Libre n° 5

Exercice 1 :

1. D'après la formule du binôme de Newton, $\big(\sqrt{6}+\sqrt{2}\big)^2 = 6-2+2\sqrt{2}\sqrt{6} = 4\big(2+\sqrt{3}\big)$.
De même $\big(\sqrt{6}-\sqrt{2}\big)^2 = 4\big(2-\sqrt{3}\big)$. ▲

2. Remarquons tout d'abord que $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$, par conséquent les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sont

$$\pm\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \pm\sqrt{2}\big(\cos\pi/12 + i\sin\pi/12\big)$$

D'autre part, calculons les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ en notation algébrique, c'est-à-dire sous la forme $x+iy$. Le couple (x,y) est solution du système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 = \sqrt{3+1} = 2 \\ x^2-y^2 = \sqrt{3} \\ x.y>0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 2+\sqrt{3} \\ 2y^2 = 2-\sqrt{3} \\ x.y>0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x.y>0 \end{array}\right.$$

car, d'après la question précédente, $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Par conséquent les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sont

$$\pm\Big(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Big)$$

En identifiant 2 à 2 les parties réelles d'une part et parties imaginaires d'autre part,
j'en déduis finalement que $\cos(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. ▲

3. Utilisons la *factorisation par l'exponentielle d'argument moitié* pour déterminer la forme exponentielle de $i+e^{i\pi/3}$. Il vient :

$$i+e^{i\pi/3} = e^{i\pi/2}+e^{i\pi/3} = 2\cos\left(\frac{\pi/2-\pi/3}{2}\right)\times\exp\left(i\,\frac{\pi/2+\pi/3}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{12}\times e^{5i\pi/12} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\times e^{5i\pi/12}$$

En passant en écriture algébrique, j'en déduis que

$$\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\times\left(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$$

Enfin, en identifiant parties réelles et imaginaires j'obtiens : $\cos 5\pi/12 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ et $\sin 5\pi/12 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. ▲

4. Présentons tout d'abord ce quotient en notation trigonométrique, il vient :

$$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1-i} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/4}} = 2e^{7i\pi/12} = 2\big(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\big).$$

D'autre part, en notation algébrique, we get :

$$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1-i} = \frac{1}{2}\big(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\big)\big(1+i\big) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{2}-\sqrt{6}\big)+i\big(\sqrt{2}+\sqrt{6}\big) = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Finalement, identifions ces deux écritures algébriques.
Il en résulte que $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. ▲

Exercice 2 :

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}^\star$ l'équation

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \tag{1}$$

Remarquons que $\forall z \in \mathbb{C}^\star$,

$$z \text{ est solution de } (1) \iff z \text{ est solution de } z^2 - 2\cos\theta\ z + 1 = 0$$

Calculons le discriminant de cette équation du deuxième degré : $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4(1-\cos^2\theta) = -4\sin^2\theta$.
Il est clair que $\Delta \leq 0$. Nous distinguons deux cas :

- Si $\theta \equiv 0[\pi]$, c'est-à-dire si θ est un multiple entier relatif de π. En ce cas, le discriminant est nul et par conséquent (1) possède une unique solution $z = \cos\theta\,(\in \{\pm 1\})$.
- Si $\theta \not\equiv 0[\pi]$, en ce cas, (1) possède deux racines complexes conjuguées. Une racine carrée complexe[1] de Δ est $i\sin\theta$.
  Par conséquent les solutions de (1) sont données par $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $z = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$. ▲

En conclusion, nous avons démontré que l'"ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (1) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. On résout l'équation

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n - 2\cos\theta = 0 \tag{2}$$

Remarquons que z *est solution de* (2) $\iff z \neq \pm i$ et $\dfrac{z+i}{z-i}$ *est solution de* (3), où (3) est l'équation définie dans $\mathbb{C}^\star$ par :

$$w^n + \frac{1}{w^n} = 2\cos\theta \tag{3}$$

Résolvons pour cela l'équation (3).
Il est clair que w est solution de (3) si et seulement si w^n est solution de (1). D'après la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} w \text{ est solution de } (3) &\iff w^n \text{ est solution de } (1)\\ &\iff w^n \in \mathcal{S}_1\\ &\iff w^n = e^{i\theta} \text{ ou } w^n = e^{-i\theta}\\ &\iff w \in \{e^{i\theta/n}, \omega e^{i\theta/n}, \dots, \omega^{n-1}e^{i\theta/n}\} \cup \{e^{-i\theta/n}, \omega e^{-i\theta/n}, \dots, \omega^{n-1}e^{-i\theta/n}\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout nombre réel θ, l'ensemble de solution de (3) est

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \{e^{\pm i\theta/n}; \omega e^{\pm i\theta/n}; \dots; \omega^{n-1}e^{\pm i\theta/n}\}}$$

On peut vérifier que ces racines sont toutes *deux à deux distinctes* lorsque $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

Résolvons finalement l'équation (2).
Il est aisé de vérifier que

$$\forall (z,w) \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\} \times \mathbb{C}\setminus\{1\}, \quad \frac{z+i}{z-i} = w \iff z = i\frac{w+1}{w-1},$$

tandis que pour $w = 1$ l'équation $\dfrac{z+i}{z-i} = 1$ n'a pas de solution. Par conséquent

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (2) &\iff z \neq \pm i \text{ et } \frac{z+i}{z-i} \text{ est solution de } (3)\\ &\iff z \neq \pm i \text{ et } \frac{z+i}{z-i} \in \mathcal{S}_3\\ &\iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{i\theta/n} \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{-i\theta/n} \end{aligned}$$

Pour conclure, nous devons discuter suivant la valeur de θ modulo 2π.

[1] évidente !

- si $\theta \equiv 0[2\pi]$. Dans ce cas, $e^{i\theta/n}$ est l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, par conséquent :

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (2) &\iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{i\theta/n} \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{-i\theta/n} \\
&\iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = \omega^k
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, je résous l'équation $\dfrac{z+i}{z-i} = \omega^k$ en discutant suivant la valeur de k.

- si $k = 0$, $\omega^0 = 1$, et ainsi que nous l'avons remarqué plus haut l'équation $\dfrac{z+i}{z-i} = 1$ n'a pas de solution.
- si $k \in [\![1, n-1]\!]$ l'équation $\dfrac{z+i}{z-i} = \omega^k$ possède pour unique solution

$$\begin{aligned}
z_k &= i\frac{\omega^k+1}{\omega^k-1} = i\,\frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} = i\,\frac{e^{ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}} \times \frac{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}} = i\,\frac{2\cos(k\pi/n)}{2i\sin(k\pi/n)} \\
&= \cot(k\pi/n).
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$

$$z \text{ est solution de } (2) \iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \cot(k\pi/n)$$

Autrement dit l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de l'équation (2) est donné par :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \{\cot(\pi/n), \cot(2\pi/n), \ldots, \cot(n-1)\pi/n\}}$$

- si $\theta \equiv \pi[2\pi]$. Raisonnons comme précédemment, il vient

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (2) &\iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{i\theta/n} \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{-i\theta/n} \\
&\iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{z+i}{z-i} = e^{i(2k+1)\pi/n} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \frac{\cos(2k+1)\pi/2n}{\sin(2k+1)\pi/2n} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \cot\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right). \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]\ z = \cot\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).
\end{aligned}$$

Autrement dit dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de l'équation (2) est donné par :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cot\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \ldots, \cot\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right\}}$$

- si $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Dans ce cas, nous obtenons un *maximum* de solutions distinctes. Raisonnant comme précédemment, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (2) &\iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{i\theta/n} \text{ ou } \frac{z+i}{z-i} = \omega^k e^{-i\theta/n} \\
&\iff z \neq \pm i \text{ et } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = e^{i(2k\pi\pm\theta)/n} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \frac{\cos(2k\pi\pm\theta)/2n}{\sin(2k\pi\pm\theta)/2n} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \cot\left(\frac{(2k\pi\pm\theta}{2n}\right).
\end{aligned}$$

Autrement dit dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de l'équation (2) est donné par :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\cot\left(\frac{\pm\theta}{2n}\right), \cot\left(\frac{2\pi\pm\theta}{2n}\right), \ldots, \cot\left(\frac{(2n-2)\pi\pm\theta}{2n}\right)\right\}}$$

▲

Exercice 3 :

Soient u et z deux nombres complexes tels que $u \neq 1$. On montre, en raisonnant par équivalence que

$$\frac{z - u\bar{z}}{1-u} \text{ est réel } \textit{si et seulement si } |u| = 1 \text{ ou } z \text{ est réel}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z - u\bar{z}}{1-u} \text{ est réel} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z - u\bar{z}}{1-u} = \overline{\left(\frac{z - u\bar{z}}{1-u}\right)} \Longleftrightarrow \frac{z - u\bar{z}}{1-u} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1-\bar{u}} \\
&\Longleftrightarrow \quad (1-\bar{u})(z - u\bar{z}) = (1-u)(\bar{z} - \bar{u}z) \\
&\Longleftrightarrow \quad z - u\bar{z} - \bar{u}z + |u|^2\bar{z} = \bar{z} - \bar{u}z - u\bar{z} + |u|^2 z \\
&\Longleftrightarrow \quad |u|^2(\bar{z} - z) + (z - \bar{z}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (1 - |u|^2)(z - \bar{z}) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré que $\dfrac{z - u\bar{z}}{1-u}$ est réel *si et seulement si* $|u| = 1$ ou z est réel. ▲

Exercice 4 :

1. Soient z et z' deux nombres complexes, montrons que :

$$|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}\big(|z + z'|^2 + |z - z'|^2\big)$$

Par définition du module, il vient

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 + |z - z'|^2 \quad &= \quad (z + z')\overline{(z + z')} + (z - z')\overline{(z - z')} \\
&= \quad |z|2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} + |z'|^2 + |z|2 - z\bar{z}' - z'\bar{z} + |z'|^2 \\
&= \quad 2(|z|^2 + |z'|^2).
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de cette dernière égalité par 2, nous obtenons le résultat annoncé. ▲

2. Soient z et z' deux nombres complexes u une racine carrée de zz'. Notons w et w' deux racines carrées de z et z' respectivement telles que $u = w.w'$. Appliquons l'identité démontrée ci-dessus aux deux nombres complexes w et w'. Il vient

$$\begin{aligned}
|z| + |z'| \quad &= \quad |w^2| + |w'^2| = |w|^2 + |w'|^2 \\
&= \quad \frac{1}{2}\left(|w + w'|^2 + |w - w'|^2\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\left(|(w + w')^2| + |(w + w')^2|\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\left(|w^2 + w'^2 + 2w.w'| + |w^2 + w'^2 - 2w.w'|\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\left(|z + z' + 2u| + |z + z' - 2u|\right) \\
&= \quad \left|\frac{z + z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} - u\right|.
\end{aligned}$$

▲

Problème 1 : Mathématiques italiennes

1. Le but de ce paragraphe est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(4) \qquad z^3 - 3iz + 1 - i = 0$$

L'idée fondamentale de Cardan est de rechercher les solutions de (4) sous la forme d'une somme $u + v$.

$$(5) \qquad \begin{cases} u + v &= z \\ u \times v &= i. \end{cases}$$

a. Supposons que z soit une solution de (4) et que (u, v) soit une solution de (5). D'après la formule du binôme de Newton, u et v vérifient :

$$\begin{cases} (u+v)^3 &= 3i(u+v) - (1-i) \\ (u+v)^3 &= 3uv(u+v) + u^3 + v^3. \end{cases}$$

Par soustraction, il en découle que $u^3 + v^3 = -(1-i)$. Comme d'après (5), $uv = i$, il s'en suit que u^3 et v^3 sont nécessairement solutions du système

$$\begin{cases} u^3 + v^3 &= -(1-i) \\ u^3 v^3 &= -i \end{cases}$$

D'après la propriété fondamentale rappelée au début du problème ceci n'est possible que si u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation polynomiale de degré 2 :

$$(6) \qquad X^2 + (1-i)X - i = 0$$

▲

b. Pour résoudre l'équation (6), calculons son discriminant : $\Delta = ((1-i)^2 + 4i = (1+i)^2 \neq 0$. Par conséquent les racines de (6) sont

$$x = \frac{-(1-i) - (1+i)}{2} = -1 \text{ et } x' = \frac{-(1-i) + (1+i)}{2} = i$$

Comme u^3 est solution de (6), il s'en suit que u est une racine cubique de x ou de x'. Or
- les racines cubiques de $x = -1$ sont $-1, -j$ et $-j^2$,
- les racines cubiques de $x' = i$ sont $-i, -ij$ et $-ij^2$.

Par conséquent

$$u \in \{-1, -i, -j, -ij, -j^2, -ij^2\}$$

De la même manière

$$v \in \{-1, -i, -j, -ij, -j^2, -ij^2\}$$

Par conséquent les valeurs possibles pour la *paire* $\{u, v\}$ sont :

$$\{-1, -i\},\ \{-1, -ij\},\ \{-1, -ij^2\},\ \{-j, -i\},\ \{-j, -ij\},\ \{-j, -ij^2\},\ \{-j^2, -i\},\ \{-j^2, -ij\},\ \{-j^2, -ij^2\}.$$

L'égalité $uv = i$ permet de selectionner parmi ces neufs paires les solutions de (5), nous obtenons :

$$\boxed{\text{Les paires } \{u, v\} \text{ solutions de (5) sont : } \{-1, -i\},\ \{-j, -ij^2\},\ \{-j^2, -ij\}}$$

c. *Résumons les étapes précédentes :* nous avons démontré que si z est solution de (4), les *paires* $\{u, v\}$ solutions de (5) sont $\{-1, -i\}$, $\{-j, -ij^2\}$, $\{-j^2, -ij\}$.
Réciproquement si la paire $\{u, v\}$ est solution de (5), i.e. $\{u, v\} = \{-1, -i\}$, $\{-j, -ij^2\}$ ou $\{-j^2, -ij\}$. Alors $u + v$ est solution de (4). En effet, posons $z = u + v$. D'après la formule du binôme de Newton, il vient :

$$z^3 = (u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 = 3iz - (1-i)$$

D'où je déduis que z est solution de (4). En considérant les paires distinctes $\{u, v\}$ rappelées ci-dessus, j'obtiens par conséquent trois solutions de (4). Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (4) est donné par

$$\mathcal{S} = \{-1 - i, -ij - j^2, -j - ij^2\}$$

▲.

2. Le but de ce paragraphe est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3-(8+2i)z^2+(16+13i)z-5-15i=0 \tag{7}$$

a. Supposons que (7) possède une solution réelle x. x vérifie donc

$$x^3-(8+2i)x^2+(16+13i)x-5-15i=0$$

En identifiant parties réelle et imaginaire dans les deux membres de cette égalité, j'obtiens

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3-8x^2+16x-5 & = & 0 \\ -2x^2+13x-15 & = & 0 \end{array}\right. .$$

En particulier, x est solution de l'équation :

$$-2X^2+13X-15=0 \tag{8}$$

▲

b. Résolvons (8). Le disrciminant de cette équation de degré 2 est : $\Delta=169-4\times(-15)\times(-2)=49=7^2$. Par conséquent, (8) possède deux racines réelles :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-13+7}{-4}=3/2 \\ x' & = & \frac{-13-7}{-4}=5 \end{array}\right. .$$

0n vérifie aisément que 5 est racine - et que 3/2 n'est pas racine - de (7). ▲

c. Pour résoudre (7), on peut facoriser par $(z-5)^2$, il existe donc un polynôme $Q\in\mathbb{C}[Z]$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}$, $z^3-(8+2i)z^2+(16+13i)z-5-15i=(z-5)Q(z)$. Notons $Q(z)=az^2+bz+c$ et déterminons les coefficients a,b et c par identification :

- En identifiant les termes de degré 2 et 0, j'obtiens facilement $a=1$ et $c=1+3i$.
- En identifiant les termes de degré 1, il vient $-5\times b+(1+3i)=16+3i$, d'où je tire $b=-3-2i$.

Par conséquent, j'ai obtenu la factorisation suivante :

$$z^3-(8+2i)z^2+(16+13i)z-5-15i=(z-5)\big(z^2-(3+2i)z+(1+3i)\big)$$

Déterminons à présent les racines de Q. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta=(3+2i)^2-4(1+3i)=5+12i-4-12i=1$. Par conséquent Q possède deux racines distinctes

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & \frac{3+2i-1}{2}=1+i \\ z' & = & \frac{3+2i+1}{2}=2+i \end{array}\right. .$$

Finalement l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (7) est donné par

$$\boxed{\mathcal{S}=\{5,1+i,2+i\}}$$

▲

3. Lisez la méthode générale de Cardan présentée dans le poly...

4. On considère l'équation à coefficients réels

$$8z^3+4z^2-4z-1=0 \tag{9}$$

a. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul, notons $\omega=e^{i2\pi/n}$, de sorte que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sont

$$\mathbb{U}_n=\{\omega^k;\ k\in\mathbb{Z}\}=\{1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}\}$$

D'après une **Proposition** du cours,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=0}$$

▲

b. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ un nombre réel.

[2] cf **Chapitre Polynômes**

- D'après les formules de Moivre et de Newton, nous avons

$$\cos 2\theta = \mathfrak{Re}\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right) = \mathfrak{Re}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2 = \mathfrak{Re}\left(\cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta\right) = 2\cos^2\theta - 1$$

- De même nous obtenons

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \mathfrak{Re}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^3 = \mathfrak{Re}\left(\cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\right)\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

(Exprimez $cos2\theta$ et $\cos 3\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$.

c. **i.** Les solutions de l'équation $Z^7 = 1$ sont les racines $7^{\text{ièmes}}$ de 1 :

$$\mathbb{U}_7 = \{1, e^{2i\pi/7}, e^{4\pi/7}e^{6\pi/7}, e^{8\pi/7}, e^{10\pi/7}, e^{12i\pi/7}\}$$

ii. De la question **a.**, je déduis que $\sum_{k=0}^{6} e^{2ik\pi/7} = 0$. Puis en prenant la partie réelle, j'obtions

$$1 + \cos(2i\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(6\pi/7) + \cos(8\pi/7) + \cos(10\pi/7) + \cos(12i\pi/7) = 0$$

On peut regrouper les 6 derniers termes deux par deux en remarquant que pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, $\cos(2k\pi/7) = \cos(14 - 2k\pi)/7$. Il en résulte

$$1 + 2\cos(2i\pi/7) + 2\cos(4\pi/7) + 2\cos(6\pi/7) = 0$$

En appliquant finalement les résultats de la question **b.** avec $\theta = 2\pi/7$, il vient en notant $\alpha = \cos(2\pi/7)$:

$$\begin{aligned}0 &= 1 + 2\alpha + 2\big(2\alpha^2 - 1\big) + 2\big(4\alpha^3 - 3\alpha\big)\\ &= 8\alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha - 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = \cos(2\pi/7)$ est solution de (9). C'est malheureusement tout ce que l'on peut dire de cette équation... ▲