Corrigé du Devoir Libre n° 6

Problème 1 :

Soit n un entier. On se propose d'étudier les polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients réels vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^\star, \quad P_n(z+\frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n} \tag{1}$$

1. Pour démontrer l'unicité du polynôme vérifiant (1), considérons des polynômes P et Q vérifiant tous deux la propriété universelle (1). En particulier, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, nous avons

$$P(k+\frac{1}{k}) = Q(k+\frac{1}{k})$$

Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $z_k = k + \frac{1}{k}$. D'après l'égalité ci-dessus le polynôme $P-Q$ possède une **infinité** de racines distinctes. Or nous savons qu'un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ possède **au plus d racines distinctes**. Par conséquent le polynôme $P-Q$ est de degré $-\infty$, c'estàdire $P = Q$. ▲

2. **Premiers exemples**

a. Le polynôme constant égal à 2 vérifie (1) pour $n=0$. Par unicité, $P_0 = 2$. De même, le polynôme X vérifie (1) pour $n=1$, donc $P_1 = X$. ▲

b. Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$,

$$(z+\frac{1}{z})^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$$

Notons $P = X^2 - 2$, l'égalité ci-dessus se traduit par

$$\forall z \in \mathbb{C}^\star,\ P(z+\frac{1}{z}) = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

Ainsi, le polynôme P vérifie la propriété (1) pour $n=2$. Par unicité, il en résulte que $P_2 = X^2 - 2$. ▲

3. Montrons par récurrence forte sur n que pour tout entier naturel n,

$\mathcal{P}(n)$ $\qquad P_0,\ P_1,\ \ldots, P_{n+2}$ existent et $P_{n+2}(X) = X\,P_{n+1}(X) - P_n(X)$.

Initialisation : Pour $n=0$, nous avons déjà remarqué que P_0, P_1 et P_2 existent. De plus $P_2 = X^2 - 2 = X P_1 - P_0$.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $P_0,\ P_1,\ \ldots, P_{n+2}$ existent et $P_{n+2}(X) = X\,P_{n+1}(X) - P_n(X)$.
Notons $P = X\,P_{n+2}(X) - P_{n+1}(X)$. Alors pour tout nombre complexe non nul z :

$$\begin{aligned}
P(z+\frac{1}{z}) &= (z+\frac{1}{z}) \times P_{n+2}(z+\frac{1}{z}) - P_{n+1}(z+\frac{1}{z}) \\
&= (z+\frac{1}{z}) \times (z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}) - (z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) \\
&= z^{n+3} + \frac{1}{z^{n+3}}
\end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme P vérifie (1) pour $n+3$, ce qui prouve par unicité que P_{n+3} existe et $P_{n+3} = X\,P_{n+2}(X) - P_{n+1}(X)$.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, P_n existe et de plus $P_{n+2}(X) = X\,P_{n+1}(X) - P_n(X)$. ▲

4. **D'autres exemples**

a. En utilisant la relation de récurrence ci-dessus, j'obtiens

$$\begin{aligned}
P_3 &= X\,P_2 - P_1 = X^3 - 3X \\
P_4 &= X\,P_3 - P_2 = X^4 - 4X^2 + 2 \\
P_5 &= X\,P_4 - P_3 = X^5 - 5X^3 + 5X.
\end{aligned}$$

▲

b. Remarquons tout d'abord que nous pouvons factoriser P_5 par X : $P_5 = X\,(X^4 - 5X^2 + 5)$. Afin de factoriser P_5, résolvons - *a priori* dans $\mathbb{C}$- l'équation :

(2) $$X^4 - 5X^2 + 5 = 0$$

Il s'agit d'une *équation bicarrée*, c'est-à-dire que $z \in \mathbb{C}$ est solution de (2) *si et seulement si* z^2 est solution de l'équation de degré 2 :

(3) $$X^2 - 5X + 5 = 0$$

Le discriminant de l'équation (3) est $\Delta = 5$. Par conséquent les racines de (3) sont

$$x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x' = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, z est solution de (2) *si et seulement si* $z^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ou $z^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.
Finalement les racines de P_5 sont

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};\ \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \right\}$$

En notant $\alpha = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ et $\beta = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, j'en déduis que P_5 se factorise sous la forme

$$P_5 = (X-\alpha) \times (X+\alpha) \times (X-\beta) \times (X+\beta)$$

▲

5. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que P_n admet pour monôme dominant X^n.
Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est immédiat.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que P_n et P_{n+1} admettent pour monômes dominants X^n et X^{n+1} respectivement. D'après la question **3.** $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. D'après les opérations algébriques sur les degrés des polynômes, et par hypothèse de récurrence, XP_{n+1} est de degré $n+2$ tandis que P_n est de degré n. Par conséquent P_{n+2} a pour monôme dominant X^{n+2}.
Conclusion : Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ que P_n admet pour monôme dominant X^n. ▲

6. Soit $\theta \in]0, \pi[$ un réel fixé.

a. Ainsi que nous l'avons déjà vu, l'équation

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$$

admet pour solutions distinctes $e^{\pm i\theta}$ ▲

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, il résulte des formules d'Euler et Moivre que

$$P_n(2\cos\theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = P_n(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}) = (e^{i\theta})^n + \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = e^{in\ \theta} + e^{-in\ \theta} = 2\cos n\theta.$$

▲

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Afin de résoudre l'équation $\tilde{P}_n(z) = 0$, remarquons que $\forall x \in]0, \pi[$

$$\begin{aligned} cos nx = 0 \quad &\iff \quad nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{tel que } x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. Notons $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. D'après la question précédente $P_n(2\cos\theta_k) = 2\cos n\theta_k$ qui est nul d'après le calcul ci-dessus. D'autre part, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k \in]0, \pi[$. L'application cos étant injective sur $]0, \pi[$, il s'en suit que les θ_k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ ont des images distinctes par l'application cos. Ainsi l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{2\cos\theta_k;\ k \in [\![0, n-1]\!]\} = \left\{ 2\ \cos\frac{\pi}{2n};\ 2\ \cos\frac{3\pi}{2n};\ 2\ \cos\frac{5\pi}{2n};\ldots;\ 2\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} \right\}$$

est constitué de n racines distinctes de P_n. Comme P_n est de degré n, il ne peut avoir d'autres racines. Ainsi, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des racines de P_n.
On en déduit la factorisation de P_n :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}) = \left(X - 2\,\cos\frac{1\pi}{2n}\right) \times \left(X - 2\,\cos\frac{3\pi}{2n}\right) \times \cdots \times \left(X - 2\,\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$$

▲

8. Lorsque $n = 5$, les racines de P_5 sont

$$\mathcal{S}\left\{2\,\cos\frac{\pi}{10};\ 2\,\cos\frac{3\pi}{10};\ 0;\ 2\,\cos\frac{7\pi}{10};\ 2\,\cos\frac{9\pi}{10}\right\}$$

En remarquant que les racines positives de P_5 sont $2\cos\frac{\pi}{10}$ et $2\cos\frac{3\pi}{10}$, j'en déduis que :

$$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

▲

Problème 2 : Interpolation

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul et $(x_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet de réels **distincts deux à deux**. On définit n polynômes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ par :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ L_j = \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$$

1. **Exemples** *Visualisez* les polynômes L_1, L_2 et L_3 lorsque $n = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

2. **a**. Soit $j \in [\![1,n]\!]$: L_j est par construction le produit de $n-1$ facteurs de degré 1. Par les opérations algébriques sur les degrés, il en résulte que L_j est de degré $n-1$. D'autre part, l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x_k;\ k \ne j\}$$

est constitué de $n-1$ racines distinctes de L_j. Comme L_j est de degré $n-1$, il ne peut avoir d'autres racines. Par conséquent $\mathcal{S}$ est l'ensemble des racines distinctes de L_j. ▲

b. Soit $j \in [\![1,n]\!]$ fixé. Par construction de L_j, il vient :

$$\tilde{L}_j(x_j) = \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}} \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k} = 1$$

▲

3. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. On lui associe le polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$Q = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)\ L_j.$$

a. D'après la question **2.**, remarquons que pour tout j et k, $L_j(x_k) = 0$ si $j \ne k$ et $L_j(x_j) = 1$, c'est-à-dire, en utilisant le symbole de Kronecker $\delta_{j,k}$, que

$$\forall j,k \in [\![1,n]\!], \quad L_j(x_k) = \delta_{j,k}$$

A présent considérons $k \in [\![1,n]\!]$, fixé. Alors

$$\tilde{Q}(x_k) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)\ L_j(x_k) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)\delta_{j,k} = P(x_k)$$

▲

b. Ainsi, le polynôme $P-Q$ possède (au moins) n racines distinctes. Comme P et Q sont de degrés inférieurs ou égaux à $n-1$, $P-Q$ est aussi de degré inférieur ou égal à $n-1$. Comme $P-Q$ possède n racines distinctes, $P-Q$ est le polynôme nul ! Par conséquent $P=Q$. ▲

4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction numérique. Associons -lui le polynôme $Q\in\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$Q=\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\ L_j.$$

Comme les L_j sont de degré $n-1$, Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$. De plus comme précédemment, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, nous avons :

$$\tilde{Q}(x_k)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\ L_j(x_k)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\delta_{j,k}=f(x_k)$$

▲

Exercice 1 : Divisions euclidiennes

Soient $\theta\in\mathbb{R}$ un réel et $n\in\mathbb{N}$ un entier.

1. Soient $A=(X\sin\theta+\cos\theta)^n$ et $B=X^2+1$,

a. Les racines de B sont les solutions de l'équations $z^2=-1$, à savoir i et $-i$.
Par conséquent $\qquad B=(X-i)\times(X+i)$ ▲

b. Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$ de sorte que

$$A=(X^2+1)\times Q$$

Comme B est de degré 2, R est de degré inférieur ou égal à un. Par suite, il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tels que $R=a+bX$. Pour déterminer a et b *évaluons* l'égalité ci-dessus aux points i et $-i$, il en résulte que (a,b) est solution du système

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{rcl}\tilde{A}(i)&=&\tilde{B}(i)\times\tilde{Q}(i)+\tilde{R}(i)\\ \tilde{A}(-i)&=&\tilde{B}(-i)\times\tilde{Q}(-i)+\tilde{R}(-i)\end{array}\right.$$

Or

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{rcl}(\cos\theta+i\sin\theta)^n&=&0+a+ib\\(\cos\theta-i\sin\theta)^n&=&0+a-ib\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}e^{in\theta}&=&0+a+ib\\e^{-in\theta}&=&0+a-ib\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}a&=&\cos n\theta\\b&=&\sin n\theta\end{array}\right..$$

Par conséquent $\qquad R=\cos n\theta+\sin n\theta X.$ ▲

2. Soient $A=X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1$ et $B=X^2-2X\cos\theta+1$.

a. Le discriminant du polynôme B est $\Delta=4\cos^2\theta-4=-4\sin^2\theta$. Pour déterminer les racines complexes de B, et donc sa factorisation, nous distinguons trois cas.

- Si $\theta\equiv0[2\pi]$ en ce cas $B=X^2-2X+1=(X-1)^2$.
- Si $\theta\equiv\pi[2\pi]$ en ce cas $B=X^2+2X+1=(X+1)^2$.
- Si $\theta\not\equiv0[\pi]$, en ce cas $\Delta=-4\sin^2\theta<0$. Dans ce cas, B possède deux racines complexes conjuguées
$$e^{i\theta}=\frac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2}\text{ et }e^{-i\theta}=\frac{2\cos\theta-2i\sin\theta}{2}.$$
Par conséquent B admet comme factorisation $\quad B=(X-e^{i\theta})\times(X-e^{i\theta})$. ▲

b. Notons $R=aX+b$ le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$. Pour déterminer les coefficients -nécessairement réels- a et b nous utilisons les trois cas précédents :

- Si $\theta\equiv0[2\pi]$. Dans ce cas $A=X^{2n}-2X^n+1=(X^n-1)^2$ et $B=(X-1)^2$. On remarque que 1 est racine de multiplicité supérieure ou égale[1] à 2 de A : en effet
  - $\tilde{A}(1)=0$
  - $\tilde{A}'(1)=2n(1^n-1)1^{n-1}=0$

  Par conséquent, d'après la caractérisation des racines multiples B divise A et donc le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

[1] en fait la multiplicité est exactement 2

- Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$. Dans ce cas $A = X^{2n} - 2(-1)^n X^n + 1 = \big(1 - (-X)^n\big)^2$ et $B = (X+1)^2$. On remarque que -1 est racine de multiplicité supérieure ou égaleà 2 de A. En effet
  - $\tilde{A}(-1) = \big(1 - (+1)^n\big)^2 = 0$
  - $\tilde{A}'(-1) = 2n\big(1 - (+1)^n\big)(1^n - 1)(-1)^{n-1} = 0$

  Par conséquent, d'après la caractérisation des racines multiples B divise A et donc le reste dans la division euclidienne de A par B est nul dans ce cas aussi.
- Si $\theta \not\equiv 0[\pi]$, dans ce cas, B possède deux racines distinctes : (a, b) est donc solution du sytème :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A(e^{i\theta}) & = & R(e^{i\theta}) \\ A(e^{-i\theta}) & = & R(e^{-i\theta}) \end{array} \right.$$

  Or

$$\begin{array}{rcl}
(S) & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} e^{2in\theta} - 2\cos(n\theta)e^{in\theta} + 1 & = & ae^{i\theta} + b \\ e^{-2in\theta} - 2\cos(n\theta)e^{-in\theta} + 1 & = & ae^{-i\theta} + b \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(2n\theta) - 2\cos(n\theta)\cos(n\theta) + 1 & = & a\cos\theta + b \\ \sin(-2n\theta) - 2\cos(n\theta)\sin(-n\theta) & = & a\sin\theta. \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a\cos\theta + b & = & \cos(2n\theta) - 2\cos(n\theta)\cos(n\theta) + 1 \\ a\sin\theta & = & \sin(-2n\theta) - 2\cos(n\theta)\sin(-n\theta) \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a\cos\theta + b & = & 0 \\ a\sin\theta & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  Comme dans e cas, $\sin\theta \neq 0$ il en résulte que $a = 0$ et par suite $b = 0$.
  Ainsi lorsque $\theta \not\equiv 0[\pi]$, le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

Dans tous les cas, nous avons démontré que le reste de la division euclidienne de A par B est nul. ▲