Corrigé du Devoir Libre n° 7

Problème 1 : Approximation des racines carrées

Soit $a > 0$ un réel strictement positif. On définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme u_0 strictement positif et la relation de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)}$$

1. On s'intéresse tout d'abord au comportement asymptotique de la suite u.

a. Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ définie pour tout $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Remarque : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$

Comme l'intervalle de définition est stable pour f, la suite u est bien définie. Pour étudier la suite u, j'étudie d'abord la fonction f.

- Variations de f :
  Soit $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\iff \quad \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} > 0 \\ &\iff \quad x^2 > a \iff x > \sqrt{a}. \end{aligned}$$

- Etude de signe de $f(x) - x$
  Soit $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - x > 0 \quad &\iff \quad x^2 + a - 2x^2 > 0 \\ &\iff \quad x^2 < a \iff x < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

  Remarque : $\sqrt{a}$ est le seul point fixe pour f : si la suite u est convergente, conne f est continue, alors u converge nécessairement vers $\sqrt{a}$.

- Tableau de variations
  Je déduis des deux études ci-dessus, le tableau suivant

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f - Id$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$ | $\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

  Remarque : f présente un minimum *global* au point $\sqrt{a}$, c"est-à-dire que $\forall x > 0, f(x) \geq \sqrt{a}$.

- Conclusion
  Discutons suivant la valeur de u_0.
  - Si $u_0 = \sqrt{a}$, la suite est constante égale à $\sqrt{a}$.
  - Si $u_0 > \sqrt{a}$. Comme l'intervalle $]\sqrt{a}, +\infty[$ est stable pour f, la suite u appartient à $]\sqrt{a}, +\infty[^{\mathbb{N}}$. De plus comme f est croissante sur $]\sqrt{a}, +\infty[$, une récurrence immédiate montre que u est monotone. Enfin, comme $f - Id$ est négative sur cet intervalle, en particulier, $u_1 - u_0 = f(u_O) - u_0$ est négatif. En conclusion la suite u est décroissante.
    Ainsi la suite u est décroissante et minorée. Par le thgéorème de convergence pour les suites monotones, il en résulte que la suite u est convergente. Elle converge nécessairement vers un point fixe pour f. Comme f admet $\sqrt{a}$ comme unique point fixe, la suite u est décroissante et convergente de limite $\sqrt{a}$.

- Si $u_0 \in]0, \sqrt{a}[$, alors $u_1 = f(u_0) > \sqrt{a}$, car $\sqrt{a}$ est le minimum de f. D'après le cas précédent, il en résulte que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et convergente de limite $\sqrt{a}$.

Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et convergente de limite $\sqrt{a}$. ▲

b. D'après la question précédente, la suite u est convergente de limite $\sqrt{a}$. ▲

c. Turbo-Pascal. Consultez le corrigé pour le TP instruction REPEAT. ▲

2. On s'intéresse à présent à la *vitesse de convergence* de la suite u.

a. Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{a}$, il s'en suit que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \geq \sqrt{a}$. Je déduis alors de la relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} et de cette inégalité que :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} \\ &= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\,(u_n - \sqrt{a})^2. \end{aligned}$$

▲

b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ que pour tout entier n supérieur ou égal à 1

$$\mathscr{P}(n) \qquad |u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{(u_1 - \sqrt{a})^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}}$$

- **Initialisation :** lorsque $n = 1$, c'est trivial.
- **Hérédité : soit** $n \geq 1$ **tel que** $\mathscr{P}(n)$, c'est-à-dire $|u_n - \sqrt{a}| \leq \dfrac{(u_1 - \sqrt{a})^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}}$.

  D'après la question précédente

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\,(u_n - \sqrt{a})^2 \\ &\overset{HR}{\leq} \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\frac{(u_1 - \sqrt{a})^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}} \\ &\leq \frac{(u_1 - \sqrt{a})^{2^n}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}. \end{aligned}$$

- **Conclusion :** par récurrence, j'ai démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad |u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{(u_1 - \sqrt{a})^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}}$$

▲

c. Supposons que $a = 2$ et prenons $u_0 = 2$ de sorte que $u_1 = 3/2$. Pour que u_n constitue une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près, il suffit, d'après la question précédente que

$$\frac{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}-1}} > 10^{-100}$$

C'est-à-dire **si**

$$n \geq 1 + \left(\frac{\ln\left|\frac{100\ln 10 + \ln 2\sqrt{2}}{\ln(3-2\sqrt{2}) - \ln(2\sqrt{2})}\right|}{\ln 2}\right).$$ ▲

d. Turbo-PascalConsultez le corrigé pour le TP instruction REPEAT. ▲

Remarque : Cette méthode pratique d'approximation des racines carrées est due à Héron d'Alexandrie qui vécut à la fin du premier siècle après J.C !

Problème 2 : Moyenne de Cesàro

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de nombre réels. On lui associe la suite *des moyennes* de terme général

$$\boxed{v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}}$$

1. **On suppose que** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. **On montre que** $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

   Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

   a. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ \left(n \geq n_1 \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

▲

   b. Soit $n \geq n_1$ fixé.

$$\begin{aligned}
|v_n| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{n} u_k\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k| + \sum_{k=n_1}^{n} |u_k|\right) \\
&\leq \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_1-1}|}{n} + \sum_{k=n_1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_1-1}|}{n} + \frac{n - n_1 + 1}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_1-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

▲

   c. Posons $M = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_1-1}|$. Notez que M est indépendant de n. Nous pouvons réecrire le résultat précédent sous la forme :

$$(\forall n \geq n_1), \quad |v_n| \leq \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

   Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0$. Par conséquent, il existe $n_2 \in \mathbb{N}^\star$, $n_2 \geq n_1$, tel que

$$(\forall n \geq n_2), \quad 0 \leq \frac{M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Bilan : Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons construit $n_2 \in \mathbb{N}^\star$, tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geq n_2 \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon)$$

▲

   d. Par définition, cela signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. ▲

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose à présent que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

   Introduisons les suites $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\tilde{u}_n = u_n - \ell$ et $\tilde{v}_n = \dfrac{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \cdots + \tilde{u}_n}{n}$.
   Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\tilde{v}_n = \frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n} = \frac{\big(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\big) - n\,\ell}{n} = v_n - \ell$$

   Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{u}_n = 0$. D'après la première question, il s'en suit que $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{v}_n = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - \ell) = 0$. But this merely signifies that $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$! ▲

3. La **réciproque du théorème de Cesàro est fausse** : il suffit de considérer la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = (-1)^n$.
Tout d'abord, il est clair que cette suite diverge : en effet, une suite extraite de u converge vers 1 tandis qu'une autre suite extraite de u converge vers -1. Montrons que pourtant sa moyenne de Cesàro est convergente. Notons que :
– si n est pair $(u_1 + u_2) + \cdots + (u_{n-1} + u_n) = (-1+1) + \cdots + (-1+1) = 0$
– si n est impair $(u_1 + u_2) + \cdots + (u_{n-2} + u_{n-1} + u_n) = (-1+1) + \cdots + (-1+1) + (-1) = -1$.
Dans tous les cas, $|u_1 + u_2 + \cdots + u_n| \leq 1$. Il en résulte que la suite des moyennes v vérifie l'estimation :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star), \quad |v_n| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème de convergence par comparaison, il en résulte que v est convergente de limite nulle. ▲

4. Cesàro infinity
Supposons que u soit une suite divergente vers $+\infty$, montrons que v est divergente vers $+\infty$.
Soit $A > 0$ fixé, il s'agit de démontrer que $v_n \geq A$ pour n suffisamment grand.
Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n \geq n_1 \Rightarrow u_n \geq 4A$.
Soit $n \geq n_1$, fixé, alors -par définition de la valeur absolue, il vient :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1-1} u_k \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_1-1} u_k\right| \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k| \\ &\geq 4\,\frac{n-n_1+1}{n}\,A - \frac{M}{n} \end{aligned}$$

où, comme précédemment , M désigne $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_1-1}|$.
De plus,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-n_1+1}{n} = 1$. Par conséquent, il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $\forall n \geq n_2$, $\frac{n-n_1+1}{n} \geq \frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M}{n} = 0$. Par conséquent, il existe $n_3 \geq n_2$ tel que $\forall n \geq n_3$, $0 < \frac{M}{n} < A$.

Soit $n \geq n_3$, il découle des estimations précédentes que

$$v_n \geq 4\,\frac{1}{2}\,A - A = A$$

Bilan : Pour tout $A > 0$, nous avons construit $n_3 \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star), \quad (n \geq n_3 \Rightarrow v_n \geq A)$$

Par définition, c'est dire que v est divergente vers $+\infty$. ▲

Remarque : Si u diverge vers $-\infty$, alors $-u$ diverge vers $+\infty$, donc -d'après ce qui précède- $-v$ diverge vers $+\infty$. Par conséquent, v diverge vers $-\infty$.

5. **Applications du théorème de convergence en moyenne de Cesàro**

a. Soit (a_n) une suite telle que : $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$.
Introduisons les suites b et v définies pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $b_n = a_n - a_{n-1}$ et $v_n = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$.
Par hypothèse, la suite b est convergente de limite ℓ. Par le théorème de Cesàro, j'en déduis que v est aussi convergente de limite ℓ. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})}{n} = \frac{a_n}{n} - \frac{a_0}{n}$$

Or, clairement, la suite $\left(\dfrac{a_0}{n}\right)$ est convergente vers 0, il en résulte que la suite $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$, qui ne diffère de la suite v que par une suite convergente de limite nulle est -comme v - convergente de limite ℓ. ▲

b. Soit b_n une suite à termes strictement positifs et $\ell > 0$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.

Introduisons la suite b définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \ln a_n$. b_n est bien définie car (a_n) est strictement positive. Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Il découle du THÉORÈME DE LA CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ de la fonction ln au point $\ell \in \mathbb{R}^{+\star}$ que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - b_{n+1}) = \ln \ell$. Appliquons le **a.** à la suite b : il en résulte que la suite $\dfrac{b_n}{n}$ est convergente de limite $\ln \ell$. Par le TCSC de la fonction exp au point $\ln \ell$, j'en déduis que la suite $\exp(\frac{b_n}{n})$ est convergente vers $\exp(\ln \ell) = \ell$. Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(\frac{b_n}{n}) = \exp(\frac{1}{n} \ln a_n) = \sqrt[n]{a_n}$$

Par conséquent, j'ai démontré que la suite $(\sqrt[n]{a_n})$ est convergente de limite ℓ. ▲