Corrigé du Devoir Libre n° 8

Exercice 1 : Suite récurrente

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

1. Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}^\star$ et que f peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$:
  En effet, si $x \neq 0$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0 \iff x \times (e^x - 1) > 0$. Or, pour $x > 0$, $e^x > 1$ et pour $x < 0$, $e^x < 1$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$. Par composition, il en résulte que f est continue sur $\mathbb{R}^\star$.
- La fonction f est prolongeable par continuité en 0 :
  Posons $y(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} - 1$. Comme $\dfrac{e^x - 1}{x} \sim_0 1$, $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$, ainsi,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0 \\ \bullet \ \lim\limits_{y \to 0} \ln(1 + y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

▲

Désormais f désigne la fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f'(x) = \frac{x}{e^x - 1} \times \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{x}{e^x - 1} \times \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\varphi(x) = e^x(x - 1) + 1$, de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) > 0 \iff \varphi(x) > 0$. Pour étudier le signe de φ, étudions les variations de cette fonction : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = xe^x$. Par conséquent $\varphi'(x)$ est du signe de x. Nous pouvons résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	1	$\searrow$ 0		0 $\nearrow$	$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 0		0 $\nearrow$	$+\infty$

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$ **et continue en 0**, il en résulte que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Au voisinage de $-\infty$:

•

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = 0^+ \\ \bullet \ \lim\limits_{t \to 0^+} \ln(t) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

- $\frac{e^x - 1}{x} \sim -\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$. En ce cas, nous pouvons en déduire un équivalent de f au voisinage de $-\infty$:

$$f(x) \sim_{-\infty} -\ln(-x)$$

Par conséquent
$$\frac{f(x)}{x} \sim_{-\infty} -\frac{\ln(-x)}{x} \sim_{-\infty} \frac{\ln|x|}{|x|} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+$$
Ainsi, **au voisinage de** $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox').

Au voisinage de $+\infty$: comme x est positif, nous pouvons écrire $f(x) = \ln(e^x - 1) - \ln x$.

- Or $e^x - 1 \sim_{+\infty} e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{+} \infty$. Ainsi pouvons-nous en déduire[1] un équivalent de f au voisinage de $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ln(e^x-1) \sim_{+\infty} x \\ \bullet\ \ln(x) = o_\infty(x) \end{array}\right) \Rightarrow f(x) \sim_\infty x$$

- Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- De plus
$$f(x) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{xe^x}\right) = \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = f(-x)$$
Or,
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} = 0^+ \\ \bullet\ \lim\limits_{t\to0^+} \ln(t) = -\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) = -\infty$$
Ainsi, **au voisinage de** $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$. ▲

3. On pose $g(x) = f(x) - x$. Nous avons déjà vérifié dans le calcul ci-dessus que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $g(x) = f(-x)$. Il est clair que cette relation est aussi vérifiée en 0. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = f(-x)$$
Nous pouvons alors déduire
$$g(x) > 0 \iff f(-x) > 0 \iff -x > 0 \iff x < 0$$
Nous pouvons consigner ces résultats dans le tableau qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 | 0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	|	$-$	

Ainsi, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la diagonale *si et seulement si* $x < 0$. ▲

4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
✓ L'intervalle $\mathbb{R}^+$ est stable pour f, donc la suite u est bien définie et $u \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.
✓ $f_| : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est croissante donc u est monotone.
✓ $u_0 > 0$ donc $u_1 = f(u_0) < u_0$, par conséquent la suite u est décroissante.
✓ La suite u étant décroissante et minorée par 0 est convergente vers un point fixe ℓ de $f_|$.
✓ Comme 0 est le seul point fixe de $f_|$, u est convergente de limite 0.

▲

[1] cf exo *équivalent de* $\ln f$

Exercice 2 : Suite récurrente

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

1. Etude de f

a. La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0 \iff x < 1$$

De plus

- **Au voisinage de $-\infty$**

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \sim_{-\infty} \frac{x}{|x|} \sim_{-\infty} -1$$

Par conséquent $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$.

- **Au voisinage de $+\infty$**

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \sim_{+\infty} \frac{x}{|x|} \sim_{+\infty} 1$$

Par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Nous en déduisons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	$\vert$	$-$	
f			$\sqrt{2}-1$		
		$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	
	-2		$\vert$		0

▲

b. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - x > 0 \quad &\iff \quad \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1) > 0 \iff \big(x+1\big)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) > 0 \\ &\iff \quad \big(x+1\big)\left(\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) > 0 \iff \big(x+1\big) \times \big(1-\sqrt{x^2+1}\big) > 0. \end{aligned}$$

Comme $x^2 \geq 0$, avec égalité seulement si $x = 0$, il en résulte immédiatement que
d'une part $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \big(f(x) \geq x \iff x+1 \leq 0\big)$
et d'autre part $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \big(f(x) = x \iff x \in \{-1, 0\}\big)$.
Nous pouvons reporter ces résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f			$-1 \ \vert$		$0 \ \vert$		$\sqrt{2}-1$		
		$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	
	-2		$\vert$	-1	$\vert \ 0$		$\vert$		0
$f - Id$		$+$	0	$-$	0		$-$		

▲

c. $\mathcal{C}_f$ eest au-dessus de la première bissectrice lorsque $x \leq -1$. ▲

2. **Etude d'une suite récurrente**
On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$ la suite u est bien définie et constante. ▲

b. On suppose dans cette question que $u_0 < -1$.

i. Soit $f_|$ la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, -1[$. D'après l'étude des variations de f, et d'après le théorème de la bijection, $f_| :]-\infty, -1[\to]-2, -1[$ est bijective. En particulier, l'intervalle $]-\infty, -1[$ est stable pour f. Par conséquent, la suite u est bien définie et $u \in \big(]-\infty, -1[\big)^{\mathbb{N}}$. ▲

ii. Comme $f_|$ est croissante, la suite u est monotone. De plus comme $f - Id$ est positive sur $]-\infty, -1[$, la suite u est croissante. ▲

iii. Ainsi, u est croissante et majorée par -1 : elle converge vers un point fixe de $f_|$. Comme le seul point fixe de $f_|$ est -1, la suite u est convergente de limite -1. ▲

c. On suppose ici que $-1 < u_0 < 0$.

✓ D'après l'étude des variations de f, l'intervalle $]-1, 0[$ est stable par f. Par conséquent la suite u est bien définie et à valeurs dans $]-1, 0[$.

✓ Comme f est croissante sur cet intervalle la suite u est monotone.

✓ Comme $f - Id$ est négative sur $]-1, 0[$, la suite u est décroissante.

✓ La suite u étant décroissante et minorée par -1 est convergente vers $\ell = \inf_n u_n$.

✓ Cmme f est continue ℓ est un point fixe de f, i.e. $\ell \in \{-1, 0\}$. Comme 0 ne minore pas u, $\ell = -1$, c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite -1.

▲

d. On suppose ici que $u_0 > 0$.
Remarquons que f atteint son maximum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1. Comme $f(1) = \sqrt{2} - 1 < 1$, la restriction $f_|$ de f à $\mathbb{R}^+$ induit une fonction

$$f_| :]0, +\infty[\to]0, 1[$$

En particulier $u_1 \in]0, 1[$. Etudions la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

✓ D'après l'étude des variations de f, l'intervalle $]0, 1[$ est stable par f. Par conséquent la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et à valeurs dans $]0, 1[$.

✓ Comme f est croissante sur cet intervalle la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

✓ Comme $f - Id$ est négative sur $]0, 1[$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

✓ La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante et positive, elle converge vers $\ell = \inf_{n\geq 1} u_n$.

✓ Comme f est continue, ℓ est nécessairement un point fixe de f, i.e. $\ell \in \{-1, 0\}$. Or par passage à la limite dans une inégalité, $\ell \geq 0$. Par conséquent $\ell \neq -1$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

▲

Problème 1 : Suites définies implicitement et récurrentes

Soit n un nombre entier naturel non nul. On se propose d'étudeier les racines de l'équation

(E_n) $$\boxed{e^x = x^n}$$

Dans ce but, on introduit les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$$

de sorte que

$$\boxed{x \text{ est solution de } (E_n) \textit{si et seulement si } f_n(x) = 0}$$

Partie I. Etude des racines positives de (E_n)

Préliminaires : Variations des fonctions f_n sur $\mathbb{R}^+$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = (x - n)\ x^{n-1} e^{-x}$$

Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n'(x) > 0 \iff x > n$$

Nous en déduisons le tableau de variation suivant :

x	0		n		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	
f_n	1	$\searrow$	$f_n(n)$	$\nearrow$	1

1. **Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)**

   a. f_1 atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1. Comme $f_1(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, (E_1) n'admet aucune solution positive. ▲

   b. f_2 atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 2. Comme $f_2(2) = 1 - \frac{4}{e^2} > 0$, (E_2) n'admet aucune solution positive. ▲

2. **Etude des racines positives de l'équation (E_3)**

   a. f_3 atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 3. De plus comme $2 < e < 3$, $f_3(3) = 1 - 27/e^3$ est strictement négatif.

   - La restriction de f_3 à l'intervalle $[0, 3]$ est une fonction continue et strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection sur $f([0, 3] = [f_3(3), 1]$. Comme $f_3(3) < 0 < 1$, $0 \in f([0, 3])$. Par conséquent, il existe une unique solution de (E_3) dans l'intervalle $[0, 3]$. Notons-la u.
   - La restriction de f_3 à l'intervalle $[3, +\infty[$ est une fonction continue et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection sur $f([3, +\infty[= [f_3(3), 1[)$. Comme $f_3(3) < 0 < 1$, $0 \in f([3, +\infty[)$. Par conséquent, il existe une unique solution de (E_3) dans l'intervalle $[3, +\infty[$. Notons-la v.

   Calculons quelques valeurs de f_3 :

   – $f_3(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$ – $f_3(4) = 1 - \dfrac{64}{e^4} < 0$

   – $f_3(2) = 1 - \dfrac{8}{e^2} < 0$ – $f_3(5) = 1 - \dfrac{125}{e^5} > 0$

Ainsi $f_3(2) < f_3(u) < f_3(1)$. Comme f_3 est strictement décroissante sur $[0,3]$, j'en déduis que

$$\boxed{1 < u < 2}$$

Comme f_3 est strictement croissante sur $[3,+\infty[$, je déduis des inégalités $f_3(4) < f_3(v) < f_3(5)$ l'encadrement :

$$\boxed{4 < v < 5}$$

b. Soit (y_n) la suite définie par la donnée de $y_0 > u$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \varphi(y_n)$, où $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall y \in]0,+\infty[, \quad \varphi(y) = 3\ln y$$

Remarquons que φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad \varphi(y) = y \iff \ln y^3 - y = 0 \iff y^3 \times e^{-y} = 1 \iff f_3(y) = 0$$

Par conséquent φ possède deux points fixes : u et v.

Remarque : Je donne ci-dessous, la preuve *attendue* de cette question. J'espère que vous voyez comment l'étude de φ et de $\varphi - Id$ permettrait de répondre plus rapidement à cette question !

- On suppose que $u < y_0 \leq v$, montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u < y_n \leq v$.
  Initialisation : OK
  Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $u < y_n \leq v$. Par stricte croissance de la fonction φ j'en déduis que $\varphi(u) < y_{n+1} \leq \varphi(v)$. Comme u et v sont fixes pour φ, il en résulte *at once* que :

  $$u < y_{n+1} \leq v$$

  Conclusion : par récurrence j'ai prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u < y_n \leq v$. ▲
- Supposons que $y_0 \geq v$ alors pour tout entier naturel n, $y_n \geq v$. En effet
  Initialisation : OK
  Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $y_n \geq v$. Par croissance de la fonction ln j'en déduis comme précédemment que $y_{n+1} \geq 3\ln v$. Comme $e^v = v^3$, il s'en suit que

  $$y_{n+1} \geq v$$

  Conclusion : par récurrence j'ai prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq v$. ▲
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, il vient

  $$y_{n+1} - y_n > 0 \iff 3\ln y_n - 3\ln y_{n-1} > 0 \iff y_n - y_{n-1} > 0$$

  Ainsi, le signe de $y_{n+1} - y_n$ est le même que le signe de $y_n - y_{n-1}$. Autrement dit, y_{n+1} et y_n sont rangés dans le même ordre que y_n et y_{n-1}. Une récurrence immédiate permet de conclure que **la suite** $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est monotone.**

Pour conclure quant à la monotonie de la suite y_n, nous étudions le signe de $\varphi - Id$:
Remarquons que pour tout $y \in]0,+\infty[$,

$$\varphi(y) - y > 0 \iff 3\ln y - y > 0 \iff y^3 e^{-y} > 1 \iff f_3(y) < 0$$

D'après le tableau de variation de f_3, nous pouvons en déduire que $3\ln y - y > 0 \iff y \in]u,v[$. Ainsi :

- Si $y_0 = v$, la suite y_n est constante égale à v.
- Si $y_0 \in]u,v[$, $y_1 > y_0$. Par conséquent la suite $(y_n) \in (]u,v[)^{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Ell converge donc vers l'unique point fixe de φ qui la majore, à savoir v.
- Si $y_0 \in]v,+\infty[$, alors $y_1 < y_0$. Par conséquent la suite $(y_n) \in (]v,+\infty[)^{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers $\ell \in \{u,v\}$. Comme pour tout entier n, $y_n > v$, j'en déduis par passage à la limite dans une inégalité que $\ell \geq v$. Il en résulte finalement que y_n est convergente de limite v. ▲

c. On choisit désormais $y_0 = 4$
On admet que

$$\forall (x,y) \in [4,5]^2, \quad |\ln x - \ln y| \leq \frac{1}{4}|x-y|$$

Comme $y_0 = 4 < v$, la suite (y_n) est croissante vers v. Par conséquent, j'en déduis, grâce aux propriétés de φ, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \leq v - y_{n+1} &= \big(\varphi(v) - \varphi(y_n)\big) \\ &= 3\ \big(\ln v - \ln y_n\big) \\ &\leq \frac{3}{4}|v - y_n| \\ &\leq \frac{3}{4}(v - y_n) \end{aligned}$$

Un récurrence immédiate permet alors de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v - y_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (v - y_0) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

la dernière inégalité provenant de l'encadrement $4 = y_0 \leq v \leq 5$.
Ainsi, y_n consitue une valeur approchée de v à 10^{-4} près pourvu que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire dès que $n \geq 4\frac{\ln 10}{\ln 4 - \ln 3}$. ▲

d. Soit (x_n) la suite définie par la donnée de $x_0 < v$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = \psi(x_n)$, où $\psi : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ est définie par :

$$\forall x > 0, \quad \psi(x) = \exp\left(\frac{x}{3}\right)$$

Remarquons que ψ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad \psi(x) - x > 0 \iff e^x > x^3 \iff f_3(x) > 0$$

En particulier, ψ possède deux points fixes : u et v.
Résumons les variations de ψ dans un tableau :

x	0		u		v		$+\infty$
ψ	1	$\nearrow$	$u \,\Vert\, u$	$\nearrow$	$v \,\Vert\, v$	$\nearrow$	$+\infty$
$\psi - Id$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- La fonction ψ est croissante donc la suite x_n est monotone.
- Supposons que $u < x_0 < v$
  Dans ce cas, l'intervalle $]u, v[$ étant stable par ψ, la suite x_n est bien définie à valeurs dans $]u, v[$. En particulier, elle est bornée. Comme de plus $\psi - Id$ est négative sur l'intervalle $]u, v[$, j'en déduis que (x_n) est décroissante. Elle st donc convergente vers $\ell \in \{u, v\}$. Comme v ne minore pas la suite (x_n), cette suite est convergente vers u.
- Supposons que $x_0 = u$, en ce cas, la suite est constante.
- Supposons que $x_0 < u$
  Dans ce cas, l'intervalle $]0, u[$ étant stable par ψ, la suite x_n est bien définie à valeurs dans $]0, u[$. En particulier, elle est bornée. Comme de plus $\psi - Id$ est positive sur l'intervalle $]0, u[$, j'en déduis que (x_n) est croissante. Etant croissante et majorée, elle converge vers $\ell \in \{u, v\}$. De plus pour tout eniter $n \in \mathbb{N}$, $x_n < u$, j'en déduis par passage à la limite dans une inégalité que $\ell \leq u$. En particlier $\ell \neq v$. Par conséquent, la suite (x_n) est convergente vers u.

Dans tous les cas, si $x_0 < v$, la suite (x_n) est convergente de limite u. ▲

Remarque : Lorsque x_0 est choisi à droite de v, la suite (x_n) est croissante à valeurs dans $]v, +\infty[$. Elle ne peut converger, ni vers u, ni vers v car aucun de ces deux *candidats limites* ne majore la suite (x_n). Par conséquent, elle diverge vers $+\infty$.

e. On choisit désormais $x_0 = 2$. On admet que

$$\forall (x, y) \in [1, 2]^2 \quad |\exp(x/3) - \exp(y/3)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$$

On en déduit comme précédemment en utilisant les propriétés de monotonie de la suite (x_n) et de la fonction exp que

$$0 \leq x_{n+1} - u = \psi(x_n) - \psi(u) \leq \frac{2}{3}(x_n - u)$$

Enfin, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_n - u \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

▲

3. Etude des racines positives de l'équation (E_n), $n \geq 3$

a. Nous avons déjà étudié sur l'intervalle $[0, +\infty[$ la fonction f_n. Elle est strictement décroissante et continue sur $[0, n]$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, n]$ sur $[f_n(n), 1]$. D'autre part, comme $n \geq 3 > e$, $f_n(n) < 0$. Par conséquent, $0 \in f_n([0, n])$. L'équation (E_n) possède donc une unique solution notée u_n dans l'intervalle $[0, n]$. De plus comme $f_n(1) = 1 - 1/e > 0$, $u_n > 1$.
De la même manière, la restriction de f_n à l'intervalle $[n, +\infty[$ est continue et strictement croissante. Elle réalise d'après le théorème de la bijection une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[f_n(n), +\infty[$. Comme $0 \in f([n, +\infty[)$, l'équation (E_n) possède une unique solution notée v_n dans $[n, +\infty[$.
Ainsi, l'équation (E_n) possède exactement deux racines positives qui vérifient en outre les inégalités :

$$1 < u_n < n < v_n$$

Le tableau suivant résume ces propriétés :

$$\begin{array}{|c|ccccccccccc|}
\hline
x & 0 & & u_n & & & n & & & v_n & & +\infty \\
\hline
 & 1 & & | & 0 & & | & & 0 & | & & 1 \\
f_n & & \searrow & | & & \searrow & | & \nearrow & & | & \nearrow & \\
 & & 0 & | & & & f_n(n) & & & | & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

b. Soit $n \geq 4$,

$$\begin{aligned} f_n(u_{n-1}) &= 1 - u_{n-1}^n \, e^{-u_n} = 1 - u_{n-1} \times \underbrace{u_{n-1}^{n-1} \, e^{-u_n}}_{=1} \\ &= 1 - u_{n-1} \end{aligned}$$

Comme $n - 1 \geq 3$ par hypothèse, il découle de la question précédente, qie $u_{n-1} > 1$. Ainsi, $f_n(u_{n-1})$ est négative. D'après les variations de la fonction f_n, ceci n'est possible que si $u_{n-1} \in]u_n, v_n[$. En particulier, $u_{n-1} > u_n$.
Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante. Comme d'autre part, (u_n) est minorée par 1, elle est convergente vers $\ell \geq 1$. ▲

c. Soit $n \in \mathbb{N}^s tar$, par construction, $f_n(u_n) = 0$, d'où on tire $u_n^n = e^{u_n}$, puis $u_n = \exp(u_n/n)$.
Or la suite u_n étant convergente, elle est en particulier bornée. Il en résulte que la suite $(u_n/n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente de limite nulle comme produit d'une suite convergente de limite 0 et d'une suite bornée. J'en déduis par unicité de la limite :

$$\begin{array}{ccc} u_n & = & \exp \frac{u_n}{n} \\ \swarrow & & \searrow \\ \ell & = & 1 \end{array}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.
D'autre part pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n - 1 = e^{u_n/n} - 1$. Or

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0 \\ \bullet \quad e^t - 1 \sim_0 t \end{array}\right) \Rightarrow u_n - 1 \sim \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$$

D'où, finalement

$$u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$$

▲

d. Soit $n \geq 4$ nous avons comme précédemment

$$f_n(v_{n-1} = 1 - v_{n-1} < 0$$

Il en résulte que $v_{n-1} \in]u_n, v_n[$. En particulier $v_{n-1} < v_n$.
Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est strictement croissante. Comme de plus $v_n > n$, la suite (v_n) est divergente vers $+\infty$. ▲

e. On pose pour tout réel $x > 1$, $g(x) = x - \ln x$.

- La fonction $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable (donc continue) en tout point de $]1, +\infty[$ et

$$\forall x > 1, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$$

Par conséquent g est continue et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to 1} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[=]1, +\infty[$. ▲

- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, comme $v_n = e^{v_n/n}$, il en résulte que $\dfrac{v_n}{n} = \ln v_n$. Par conséquent

$$g(v_n/n) = \frac{v_n}{n} - \ln \frac{v_n}{n} = \ln v_n - \ln v_n + \ln n = \ln n.$$

▲

- Soit $n \in N^\star$, de l'égalité ci-dessus, je tire : $\dfrac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln n)$. Or, d'après le théorème de la bijection $\lim\limits_{y\to+\infty} g^{-1}(y) = \sup g^{-1}(]1, +\infty[) = \sup]1, +\infty[= +\infty$. Ainsi , par composition des limites

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{y\to+\infty} g^{-1}(y) = +\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g^{-1}(\ln n) = +\infty$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{\rightrightarrows \\ \infty}} v_n n = +\infty$$

- Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$. En particulier, par composition des limites

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{n} = +\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(v_n/n)}{v_n/n} = 1$$

Comme $g(v_n/n) = \ln n$, j'en déduis finalement que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{v_n} = 1$$

Autrement dit

$$v_n \sim n \ln n$$

▲

Partie II. Etude des racines négatives de (E_n)

1. Existence des racines négatives de (E_n)

a. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$

$$\forall x < 0, \qquad \begin{aligned} f_{2k}(x) &= 1 - x^{2k} e^{-x} \\ f'_{2k}(x) &= x^{2k-1} e^{-x}(x - 2k) \end{aligned}$$

En particulier f_{2k} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$. Le tableau suivant consigne ces propriétés :

x	$-\infty$		0
			1
f_{2k}		$\nearrow$	
	$-\infty$		

$$\forall x < 0, \qquad \begin{aligned} f_{2k+1}(x) &= 1 - x^{2k+1} e^{-x} \\ f'_{2k+1}(x) &= x^{2k} e^{-x}(x - 2k - 1) \end{aligned}$$

En particulier f_{2k+1} est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Le tableau suivant consigne ces propriétés :

x	$-\infty$		0
	$+\infty$		
f_{2k+1}		$\searrow$	
			1

b.

Comme $\lim_{x \to -\infty} f_{2k}(x) = -\infty$, la fonction continue et strictement croissante f_{2k} réalise d'après le théorème de la bijection, une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 1]$.
Comme $0 \in f_{2k}(]-\infty, 0])$, l'équation (E_{2k}) possède une unique solution négative.

Comme $\lim_{x \to -\infty} f_{2k}(x) = +\infty$, la fonction continue et strictement déroissante f_{2k+1} réalise d'après le théorème de la bijection, une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[1, +\infty[$.
Comme $0 \notin f_{2k}(]-\infty, 0])$, l'équation (E_{2k+1}) ne possède aucune solution négative.

Ainsi, l'équation (E_n) possède des solutions négatives *si et seulement si* n est pair.

De plus, si tel est le cas, (E_n) possède une unique solution négative. ▲

2. **Etude des racines négatives de l'équation** (E_{2n})

a. Notons w_n l'unique solution négative de l'équation (E_{2n}).
Comme $f_{2n}(-1) < 0 < f_{2n}(0)$, il découle de la croissance stricte de f_{2n} l'encadrement

$$-1 < w_n < 0$$

▲

b. Soit $n \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} f_{2n}(w_{n-1}) &= 1 - w_{n-1}^{2n}\ e^{-w_n} \\ &= 1 - w_{n-1}^2 \times \underbrace{w_{n-1}^{2(n-1)}\ e^{-w_n}}_{=1} \\ &= 1 - w_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Comme d'après la question précédente, $|w_{n-1}| < 1$, il s'en suit que $f_{2n}(w_{n-1}) > 0$, i.e. $f_{2n}(w_{n-1}) > f_{2n}(w_n)$.
Comme f_{2n} est strictement croissante, il en résulte que

$$w_{n-1} > w_n$$

Par conséquent la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante. Comme d'après la première question $w_n \in]-1, 0[$, j'en déduis que w_n est convergente vers $\ell \geq -1$. ▲

c. Montrons que $\ell = -1$. Ecrivons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,$w_n^2 = \exp \frac{w_n}{n}$. Comme de plus w_n est négative, j'en déduis que

$$w_n = -\exp \frac{w_n}{2n}$$

Comme (w_n) est bornée, la suite $\big(w_n/2n\big)$ est convergente de limite nulle. Par unicité de la limite, il en résulte de façon tout à fait analogue à la question **3.c** que $\lim_{n \to \infty} w_n = -1$. ▲

d. En composant la limite $\lim_{n \to \infty} w_n/2n = 0$ et l'équivalent usuel pour la fonction exp au voisinage de 0, j'en déduis fiinalement que

$$w_n + 1 = 1 - e^{w_n/2n} \sim -\frac{w_n}{2n} \sim \frac{1}{2n}$$

▲