Corrigé du Devoir Libre n° 9

Problème 1 : Suites récurrentes affines d'ordre 1

Dans tout le problème I désigne I_3 la matrice identité et on considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit aussi
- $A^0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = A \times A^n$,
- $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

Partie I.

1. On vérifie que $L \times M = M \times L = 0$.

2. On vérifie que $L^2 = 3L$ et que $M^2 = 3M$. J'en déduis par récurrence que $L = 3^{n-1}L$.
Initialisation : lorsque $n = 1$, il n'y a rien à faire.
Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $L^n = 3^{n-1}L$. En ce cas

$$L^{n+1} = L \times L^n = 3^{n-1}L^2 = 3^{n-1}L \times 3L = 3^n L.$$

Conclusion : Par récurrence, j'ai prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ L^n = 3^{n-1}L$.
De même, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ M = 3^{n-1}M$. ▲

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Remarquons que d'après la première question, les matrices L et M commutent. Par conséquent, la formule du binôme de Newton s'applique et donne :

$$A^n = (L - M) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L^k \times (-M)^{n-k}$$

Or d'après la première question le produit $L \times M$ est nul. Ainsi, les produits de puissances strictement positives de L et M sont nuls. Dans la somme ci-dessus seuls subsistent les termes correspondants aux indices $k = 0$ et $k = n$. Utilisant les expressions de la question précédente pour L^n et M^n, j'obtiens :

$$A^n = L^n + (-1)^n M^n = 3^{n-1}L + (-1)^n 3^{n-1} M = 3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M.$$

▲

4. Je déduis du calcul ci-dessus des puissances de A que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k = I + \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^{k-1}L - (-3)^{k-1}M\right) \\ &= I + \sum_{k=0}^{n-2} \left(3^k L - (-3)^k M\right) \\ &= I + \frac{3^{n-1} - 1}{2}\ L - \frac{1 - (-3)^{n-1}}{4}\ M. \end{aligned}$$

▲

5. Soit $S = I - A$

a. L'algorithme de Gauss- Jordan montre que A est inversible et que

$$S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Comme les matrices I et A commutent, la formule d'Audrey s'applique :

$$(I - A) \times S_n = I - A^n$$

Comme S est inversible, j'obtiens en multipliant les deux membres de cette égalité à gauche par S^{-1}

$$S_n = S^{-1} \times (I - A^n)$$

▲

Partie II.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel différent de 1 et $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ un réel non nul. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $x_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad x_n = \lambda x_{n-1} + \alpha n^2$$

1. Montrons par *Analyse-synthèse* qu'il existe une suite $(Q_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont le terme général est un polynôme de degré 2 en n qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad Q_n = \lambda Q_{n-1} + \alpha n^2$$

Analyse : Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la suite (Q_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $Q_n = an^2 + bn + c$ vérifie la relation de récurrence ci-dessus.

En ce cas, pour tout entier naturel non nul $an^2 + bn + c = \lambda\big(an^2 - 2an + a + bn - b + c\big) + \alpha n^2$. C'est-à-dire

$$\big(a(1-\lambda) - \alpha\big)\ n^2 + \big(b(1-\lambda) + 2a\lambda\big)\ n + \big(c(1-\lambda) + \lambda b - \lambda a)\big) = 0$$

Cette équation polynômiale de degré 2 est donc vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$. En particulier elle possède une infinité de racines. Ceci n'est possible que si le polynôme est identiquement nul, c'est-à-dire si ses coefficients sont nuls. Ainsi a, b, c sont-ils solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (1-\lambda)a & & & = \alpha \\ 2\lambda a & +(1-\lambda)b & & = 0 \\ -\lambda a & +\lambda b & +(1-\lambda)c & = 0 \end{array}\right.$$

En résolvant ce système triangulaire supérieur par *descente* j'obtiens :

$$a = \frac{\alpha}{1-\lambda}; \quad b = \frac{-2\lambda\ \alpha}{(1-\lambda)^2}; \quad c = \frac{\lambda\ \alpha(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3}.$$

Synthèse : Soit (Q_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$Q_n = \frac{\alpha}{1-\lambda} n^2 - 2\,\frac{\lambda\ \alpha}{(1-\lambda)^2}\, n + \frac{\lambda\ \alpha(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3}.$$

L'analyse ci-dessus montre que cette suite vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad Q_n = \lambda Q_{n-1} + \alpha n^2$$

▲

2. Soit (y_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $y_n = x_n - Q_n$. Des relations de récurrence entre x_n et x_{n-1} d'une part et Q_n et Q_{n-1} d'autre part, je déduis

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad y_n = x_n - Q_n = \lambda x_{n-1} + \alpha n^2 - \lambda Q_{n-1} - \alpha n^2 = \lambda\big(x_{n-1} - Q_{n-1}\big) = \lambda y_{n-1}$$

Ainsi, la suite (y_n) est géométrique de raison λ. Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \lambda^n y_0 = \lambda^n (x_0 - c)$$

Or par construction, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - Q_n$. J'en déduis finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \lambda^n \left(x_0 - \frac{\lambda\ \alpha(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3}\right) + \frac{\alpha}{1-\lambda} n^2 - 2\,\frac{\lambda\ \alpha}{(1-\lambda)^2}\, n + \frac{\lambda\ \alpha(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3}.$$

▲

Partie III.

Etant données trois suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit pour tout entier naturel n :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

On considère l'équation matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad X_n = AX_{n-1} + B$$

où A est la matrice carrée d'ordre 3 définie au début du problème et $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne donnée.

1. On pose $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \times X_0 + S_n B$$

Initialisation : Lorsque $n = 0$, $A^0 \times X_0 + S_0 = I \times X_0 + 0 = X_0$.
Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que $X_n = A^n \times X_0 + S_n B$. Alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A \times X_n + B \overset{HR}{=} A \times \big(A^n \times X_0 + S_n B\big) + B \\ &= A^{n+1} \times X_0 + (A \times S_n) \times B + B = A^{n+1} \times X_0 + B + A \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) \times B \\ &= A^{n+1} \times X_0 + B + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1}\right) \times B = A^{n+1} \times X_0 + B + \left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right) \times B \\ &= A^{n+1} \times X_0 + S_{n+1} \times B. \end{aligned}$$

Concluzion : Par récurrence, j'ai démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \times X_0 + S_n B$$

Dans la première partie, nous avons calculé les expressions de A^n et S_n en fonction de I, L, M et n. J'en déduis que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X_n &= \big(3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M\big) \times X_0 + \left(I + \frac{3^{n-1}-1}{2}\,L - \frac{1-(-3)^{n-1}}{4}\,M\right) \times B \\ &= 3^{n-1}L \times X_0 - (-3)^{n-1}M \times X_0 + \frac{1}{2}\big(3^{n-1}-1\big)L \times B + \frac{1}{4}\big((-3)^{n-1}-1\big)M \times B + B. \end{aligned}$$

Or

$$L \times X_0 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad M \times X_0 = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad L \times B = 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad M \times B = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} X_n &= 3^{n-1}L \times X_0 - (-3)^{n-1}M \times X_0 + \frac{1}{2}\big(3^{n-1}-1\big)L \times B + \frac{1}{4}\big((-3)^{n-1}-1\big)M \times B + B \\ &= 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\big(3^{n-1}-1\big) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\big((-3)^{n-1}-1\big) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans l'égalité matricielle ci-dessus, le coefficient de la première ligne est u_n, celui de la deuxième est v_n et celui de la troisième est w_n. J'en déduis :

$$\begin{aligned} u_n &= 3^n + \frac{15}{2}(3^{n-1}-1) + 3 \\ &= \frac{7}{2}3^n - \frac{9}{2}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_n &= (-2)(-3)^n - \frac{9}{4}\,(-3)^{n-1} + \frac{9}{4} - 5 \\ &= -\frac{5}{4}(-3)^n - \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

et $w_n = (-1 - \frac{5}{2})\ 3^n + (2 - \frac{3}{4})(-3)^n + \frac{15}{2} - \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{2}3^n + \frac{5}{4}(-3)^n + \frac{5}{4}$. ▲

b. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par la donnée de son premier terme $x_0 \in \mathbb{R}$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad x_n = ax_{n-1} + b$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
D'après le cours, je sais que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, x_n est donné par

$$\boxed{x_n = a^n x_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b}$$

Dans cette partie nous avons étudié la suite de matrices (X_n) définie par la donnée de son premier terme X_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad X_n = AX_{n-1} + B$$

Nous avons démontré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,$X_n = A^n \times X_0 + S_n B$. Utilisons les résultats de la partie I pour le calcul de S_n, il vient

$$\boxed{X_n = A^n \times X_0 + (I-A)^{-1}(I-A^n) \times B}$$

Il s'agit donc de la *même formule* que dans le cas d'une suite arithmético-géométrique de nombres.

Nb : Les expressions du genre $\dfrac{A}{B}$ n'ont pas de sens lorsque A et B sont des matrices car la multiplication des matrices n'est pas commutative. *Lorsque* B est inversible, on note suivant les cas $B^{-1} \times A$ ou $A \times B^{-1}$.

2. On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2n^2 \\ n^2 \\ -2n^2 \end{pmatrix}$, et on considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} a_n & = & u_n & +v_n & +w_n \\ b_n & = & 2u_n & -v_n & -w_n \\ c_n & = & u_n & -2v_n & +w_n \end{array} \right.$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les trois suites définies au début de la partie 3.

a. b. c. Le but des questions qui suivent est de déterminer une relation de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, commençons par traduire matriciellement les équations définissant ces suites :

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Les équations ci-dessus se traduisent par

(1) $\qquad C_n = D \times X_n, \quad$ où D est la matrice définie par $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Or, par construction, $X_n = A \times X_{n-1} + B$, j'en déduis que

(2) $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad C_n = D \times \big(A \times X_{n-1} + B\big) = \big(D \times A\big) \times X_{n-1} + D \times B$

Cette égalité permet d'exprimer a_n b_n et c_n en fonction de u_{n-1}, v_{n-1} et w_{n-1}. Pour avoir l'expression de a_n b_n et c_n en fonction de a_{n-1}, b_{n-1} et c_{n-1}, il suffit d'*inverser* (1). Or l'algorithme de Gauss-Jordan montre que la matrice D est inversible et que

$$D^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que (1) donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = D^{-1} \times C_n$$

Par suite, (2) donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad C_n = \Big(D \times A \times D^{-1}\Big) \times C_{n-1} + D \times B$$

Le calcul montre que

$$D \times A \times D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D \times B = \begin{pmatrix} n^2 \\ 5n^2 \\ -2n^2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, nous avons obtenu pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{cases} a_n &= n^2 \\ b_n &= 3b_{n-1} + 5n^2 \\ c_n &= -3c_{n-1} - 2n^2 \end{cases}$$

Finalement, on obtient les expressions de b_n et c_n en fonction de n en remarquant que ces suites vérifient des relations de récurrence étudiées dans la partie II.

La suite b ($\lambda = 3$, $\alpha = 5$ et $b_0 = 6$) est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{27}{2}\, 3^n - \frac{5}{2} n^2 - \frac{15}{2}\, n - \frac{15}{2}$$

La suite c ($\lambda = -3$, $\alpha = -2$ et $c_0 = -3$) est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\frac{45}{16}\, (-3)^n - \frac{1}{2}\, n^2 - \frac{3}{4}\, n - \frac{3}{16}$$

▲▲▲

d. Finalement comme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_n = D^{-1} \times C_n$, i.e.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

j'en déduis

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{9}{2}\, 3^n - \dfrac{1}{2}\, n^2 - \dfrac{15}{2}\, n - \dfrac{15}{2} \\[2ex] v_n &= \dfrac{15}{16}\, (-3)^n + \dfrac{1}{2}\, n^2 + \dfrac{1}{4}\, n + \dfrac{1}{16} \\[2ex] w_n &= -\dfrac{9}{2}\, 3^n - \dfrac{15}{16}\, (-3)^n + n^2 + \dfrac{9}{4}\, n + \dfrac{39}{16} \end{cases}$$

▲