Corrigé du Devoir Surveillé N°2

Partie I. Analyse combinatoire

Exercice 1 : Jeu de cartes

Notons $\mathscr{J}$ le jeu de 52 cartes et $E = \mathscr{C}(13, \mathscr{J})$ l'ensemble des parties à 13 éléments de $\mathscr{J}$.

1. $\mathsf{Card}\ E = \binom{52}{13}$ ▲

2. **a.** Soit A l'ensemble des mains contenant au moins un pique. Pour dénombrer A il est préférable de calculer cardinal de son complémentaire dans E, c'est-à-dire le sous ensemble formé des mains ne contenant pas de piques. Il est clair que $\mathsf{Card}\ \complement_E A = \binom{39}{13}$. D'où $\mathsf{Card}\ A = \dbinom{52}{13} - \dbinom{39}{13}$ ▲

b. Soit B l'ensemble des mains contenant au plus un pique. Remarquons que $B = B_0 \cup B_1$ où B_i est le sous-ensemble de E formé des mains contenant exactement i piques.

i. D'après la question précédente $\mathsf{Card}\ B_0 = \binom{39}{13}$

ii. Pour dénombrer B_1 on peut raisonner par étapes :

- je choisis une carte à pique $\rightsquigarrow \binom{13}{1}$ possibilités
- je choisis douze cartes non piques $\rightsquigarrow \binom{39}{12}$ possibilités

D'où $\mathsf{Card}\ B_1 = +\binom{13}{1} \times \binom{39}{12}$.

Au total $\mathsf{Card}\ B = \mathsf{Card}\ \left(B_0 \sqcup B_1\right) = \mathsf{Card}\ B_0 + \mathsf{Card}\ B_1 = \dbinom{39}{13} + \dbinom{13}{1} \times \dbinom{39}{12}$ ▲

c. Notons C la partie de E formée des mains contenant un as et au plus deux piques.
Je raisonne discute suivant que la main contient ou pas l'**as de pique** :

avec as de pique La main peut contenir un pique ou deux piques exactement

avec un seul pique il y a un seul choix possible pour le pique puis $\binom{36}{12}$ possibilités pour les autres cartes.

avec deux piques il y a un seul choix possible pour l'as de pique , puis $\binom{12}{1}$ possibilités pour l'autre pique, puis $\binom{36}{11}$ possibilités pour choisir les onze dernières cartes, qui ne sont ni des piques, ni des as.

Au total, il y a $\dbinom{36}{12} + \dbinom{12}{1} \times \dbinom{36}{11}$ mains contenant l'as de pique et au plus deux piques.

sans as de pique La main peut contenir aucun pique, un pique ou deux piques exactement.

sans pique Il y a $\binom{3}{1}$ choix possibles pour l'as, puis $\binom{36}{12}$ choix possibles pour les douze cartes qui ne sont, ni des as , ni des piques.

avec un seul pique Il y a $\binom{3}{1}$ choix possibles pour l'as, puis $\binom{12}{1}$ choix possibles pour le pique, puis $\binom{36}{11}$ choix possibles pour les onze cartes qui ne sont ni des piques ni des as.

avec deux piques Il y a $\binom{3}{1}$ choix possibles pour l'as, puis $\binom{12}{2}$ choix possibles pour les piques, puis $\binom{36}{10}$ choix possibles pour les dix cartes qui ne sont ni des piques ni des as.

Au total, il y a $\dbinom{3}{1} \times \dbinom{36}{12} + \dbinom{3}{1} \times \dbinom{12}{1} \times \dbinom{36}{11} + \dbinom{3}{1} \times \dbinom{12}{2} \times \dbinom{36}{10}$ mains contenant un as et au plus deux piques qui ne contiennent pas l'as de pique.

Finalement

$\mathsf{Card}\ C = \dbinom{36}{12} + \dbinom{12}{1} \times \dbinom{36}{11} + \dbinom{3}{1} \times \dbinom{36}{12} + \dbinom{3}{1} \times \dbinom{12}{1} \times \dbinom{36}{11} + \dbinom{3}{1} \times \dbinom{12}{2} \times \dbinom{36}{10}$. ▲

Exercice 2 : Jeu de chiffres et de lettres

1. L'ensemble des codes possibles est $E = \{A, B, C\} \times \{1, \ldots, 9\}^4$. Il y a donc 3×9^4 codes différents. ▲

2. **a.** Soit $A = \{\text{codes avec le chiffre7}\}$. Plutôt que de dénombrer directement A, je dénombre son complémentaire :

$$\complement_E A = \{A, B, C\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}^4$$

Il est clair que $\mathsf{Card}\ \complement_E A = 3 \times 8^4$, d'où finalement $\mathsf{Card}\ A = 3 \times (9^4 - 8^4)$. ▲

b. Soit $B = \{\text{codes à chiffres pairs}\} = \{A, B, C\} \times \{2, 4, 6, 8\}^4$. D'où $\mathsf{Card}\ B = 3 \times 4^4$. ▲

c. Soit $C = \{\text{codes à chiffres différents}\} = \{A, B, C\} \times \mathscr{A}(4, \mathbb{F}_9)$. D'après les règles de calculs pour les cardinaux des produits cartésiens, il vient :
$\mathsf{Card}\ C = 3 \times A_9^4$. ▲

d. Soit $D = \{\text{codes à liste de chiffres strictement croissante}\} = \{A, B, C\} \times \mathscr{C}(4, \mathbb{F}_9)$. D'après les règles de calculs pour les cardinaux des produits cartésiens, il vient : $\mathsf{Card}\ D = 3 \times \binom{9}{4}$. ▲

Partie II. Propriétés des coefficients du binôme

Exercice 1 : Formule de Van der Monde

Soient n, p, q des nombres entiers tels que $n \leq p$ et $n \leq q$. On considère un ensemble E à $p + q$ éléments, et $F \subset E$ une partie de E à p éléments. On note $\mathcal{C}(n, p + q)$ l'ensemble des parties à n éléments de E.

1. $\mathsf{Card}\ \mathcal{C}(n, p+q) = \binom{p+q}{n} = \dfrac{(p+q)!}{n!\ (p+q-n)!}$ ▲

2. Dénombrons $\mathcal{C}(n, p+q) = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid \mathsf{Card}\ A = n\}$ en discutant suivant la valeur $k \in [\![0, p]\!]$ du cardinal de l'intersection $A \cap F$.

- je choisis une partie D de F à k éléments, $\rightsquigarrow \binom{p}{k}$ possibilités.
- je choisis une partie G à $n - k$ éléments de E qui ne rencontre pas F $\rightsquigarrow \binom{q}{n-k}$ possibilités.

$A = D \cup G$ est une partie de E à n éléments dont k exactement sont éléments de F.

Au total, $\mathsf{Card}\ \mathcal{C}(n, p+q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. ▲

3. D'après les deux questions précédentes, nous avons : $\displaystyle\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. En particulier, prenons $p = q = n$, il vient : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. ▲

4. **a**. Soient p et k des entiers tels que $2 \leq k \leq p$, d'après le propriétés des coefficients du binôme, nous avons :
,
$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1} = \frac{p(p-1)}{k(k-1)}\binom{p-2}{k-2}$$ ▲

b. Soit $p \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} k(k-1)\binom{p}{k}^2 &= \sum_{k=2}^{p} k(k-1)\ \binom{p}{k} \times \binom{p}{k} = \sum_{k=2}^{p} p(p-1)\ \binom{p}{k} \times \binom{p-2}{k-2} \\
&= p(p-1)\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \times \binom{p-2}{k-2} = p(p-1)\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \times \binom{p-2}{p-k}
\end{aligned}$$

Dans la dernière expression, on reconnaît la somme calculée à la question 3. avec $q = p - 2$ et $n = p$.
Par conséquent $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k(k-1)\binom{p}{k}^2 = p(p-1)\ \binom{2p-2}{p}$. ▲

Exercice 2 : Un calcul de somme

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on calcule $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\frac{A_n^k}{n^k}$.

1.
$$S = \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{A_n^k}{n^k} = \sum_{i=0}^{n} (n-i)\,\frac{A_n^{n-i}}{n^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n} (n-i)\,\frac{n!}{i!}\frac{n^i}{n^n} = \frac{n!}{n^n}\sum_{i=0}^{n} (n-i)\,\frac{n^i}{i!}$$ ▲

2. Par conséquent $S = \dfrac{n!}{n^n}\left(n\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n} i\frac{n^i}{i!}\right)$.

3. D'où finalement :

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{n!}{n^n}\left(n\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}-\sum_{i=0}^{n} i\frac{n^i}{i!}\right)=\frac{n!}{n^n}\left(n\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}-\sum_{i=1}^{n} i\frac{n^i}{i!}\right)\\
&= \frac{n!}{n^n}\left(n\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}-n\sum_{i=1}^{n}\frac{n^{i-1}}{(i-1)!}\right)=\frac{n!}{n^{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{n^i}{i!}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^i}{i!}\right)\\
&= \frac{n!}{n^{n-1}}\frac{n^n}{n!}=n..
\end{aligned}
$$

▲

Partie III. Dénombrements

Exercice 3 : Nb de p-listes $(\mathbf{A_i})_{1\leq i\leq p}$ de $\mathscr{P}(\mathbf{E})$ tq $\bigcup_{i=1}^{p}\mathbf{A_i}=\mathbf{E}$

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ un entier non nul et E un ensemble de cardinal n.

1. Notons R l'ensemble des couples $(A,B)\in\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)$ de parties de E telles que $A\cup B=E$. Pour dénombrer R, je discute suivant la valeur $k\in[\![0,n]\!]$ du cardinal de A :

- je choisis une partie A de E à k éléments $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités
- je choisis une partie B de E telle que $A\cup B=E$, c'est-à-dire une partie B qui contient $\complement_E A$.
  Une telle partie B peut s'écrire $B=\complement_E A\cup D$, où $D\subset A$ est une partie de A. De plus B est entièrement déterminée par la donnée de D.
  Il y a donc autant de possibilités pour choisir B qu'il y a de parties dans A, $\rightsquigarrow 2^k$ possibilités.

Finalement $\mathsf{Card}\ R=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$ d'après la formule du binôme de Newton. ▲

2. Notons $F=\{0,1\}^2\setminus\{(0,0)\}$ et F^E l'ensemble des applications de E vers F.

a. Comme $\mathsf{Card}\ F=3$, il résulte des règles de calculs élémentaires sur les cardinaux que $\mathsf{Card}\ F^E=3^n$. ▲

b. Soit φ l'application définie par $\varphi\left|\begin{array}{ccc} R & \to & F^E\\ (A,B) & \mapsto & (\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)\end{array}\right.$.

i. Montrons que φ est bien définie. Tout d'abord, l'application $\tilde{\varphi}$ qui à tout couple (A,B) de parties de E associe $(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)\in\left(\{0,1\}^2\right)^E$ est bien définie et bijective d'après les propriétés des fonctions indicatrices. D'autre part, si $(A,B)\in\mathbb{R}$, montrons par l' **absurde** que l'application $(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)$ ne prend jamais la valeur $(0,0)$.Supposons *au contraire* qu'il existe un élément x de E pour lequel $(\mathbb{1}_A(x),\mathbb{1}_B(x))=(0,0)$. Par définition du produit cartésien, cela signifie que $\mathbb{1}_A(x)=0$ et $\mathbb{1}_B(x)=0$. Ainsi $x\notin A$ et $x\notin B$, i.e. $x\notin A\cup B$. Ce qui *contredit* le fait que $A\cup B=E$. Finalement nous avons démontré que $\forall(A,B)\in\mathbb{R},\ \forall x\in E,\ (\mathbb{1}_A(x),\mathbb{1}_B(x))\in\mathbb{F}$.

ii. Montrons que φ est bijective. Comme $\tilde{\varphi}$ est injective, φ l'est aussi a*a fortiori*. Montrons que φ est surjective. Soit $(f,g)\in F^E$. Comme $\tilde{\varphi}$ est surjective, il existe un couple (A,B) de partie de E telles que $f=\mathbb{1}_A$ et $g=\mathbb{1}_B$. Montrons par **l'absurde** que $(A,B)\in\mathbb{R}$. Supposons *au contraire* que $(A,B)\notin R$. Il existe donc un élément x de E tel que $x\notin A\cup B$, alors $\big(f(x),g(x)\big)=\big(ind_A(x),ind_B(x)\big)=(0,0)$ ce qui contredit le fait que (f,g) est à valeurs dans F. ▲

c. Comme $\varphi:R\to F^E$ est bijective, il en résulte que $\mathsf{Card}\ R=\mathsf{Card}\ F^E=3^n$ ▲

3. Notons R_3 l'ensemble des triplets (A,B,C) de parties de E tels que $A\cup B\cup C=E$ et $F_3=\{0,1\}^3\setminus\{(0,0,0\}$. On considère alors l'application :

$$
\varphi_3\ :\ \begin{array}{ccc} R_3 & \to & F_3^E\\ (A,B,C) & \mapsto & (\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B,\mathbb{1}_C)\end{array}
$$

On montre comme précédemment que l'application φ_3 est bijective, par conséquent
$\mathsf{Card}\ R_3=\mathsf{Card}\ F_3^E=7^n$. ▲

4. Notons R_p l'ensemble des p-listes $(A_i)_{1\leq i\leq p}$ de parties de E telles que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p}A_i=E$ et $F_p=\{0,1\}^p\setminus\{(0,\dots,0)\}$.

On considère l'application :

$$
\tilde{\varphi}_p\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E)^p & \to & \left(\{0,1\}^p\right)^E\\ (A_i) & \mapsto & (\mathbb{1}_{A_1},\dots,\mathbb{1}_{A_p})\end{array}
$$

Cette application vérifie

$$(1) \qquad \forall (A_i) \in \mathscr{P}(E)^p, \forall x \in E \quad \big(\mathbb{1}_{A_1}(x), \dots, \mathbb{1}_{A_p}(x)\big) = \big(0, \dots, 0\big) \iff x \notin \bigcup_{i=1}^{p} A_i.$$

L'équation (1) permet de vérifier que cette application $\tilde{\varphi}_p$ induit une bijection noté φ_p de R_p sur F_p^E. Ainsi $R_p \simeq F_p^E$. Comme $\mathsf{Card}\ F_p = 2^p - 1$, il résulte des règles de calcul élémentaires sur les cardinaux que
.
$$\mathsf{Card}\ R_p = (2^p - 1)^n.$$
▲