Corrigé du Devoir Surveillé n° 3

Exercice 1 : Deux candidats à l'oral de mathématiques

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des 20 sujets possibles.

1. Un résultat possible est une paire de sujets, donc $\Omega_1 = \mathscr{C}(2, \mathcal{S})$. Comme heureusement pour le candidat, le tirage se fait au hasard Ω_1 est muni de la probailité uniforme. $\mathsf{Card}\ \Omega_1 = \binom{20}{2} = 190$. A_1 est le sous-ensemble de Ω_1 formé des 10 paires de sujets provenant des mêmes examinateurs, par conséquent $\mathsf{Card}\ A_1 = 10$ et $p(A_1) = \dfrac{\mathsf{Card}\ A_1}{\mathsf{Card}\ \Omega_1} = \dfrac{1}{19}$. ▲

2. **a**. Le premier candidat a tiré deux sujets provenant d'un même examinateur. On cherche $p_{A_1}(A_2)$.
   Il reste donc 18 sujets possibles provenant de 9examinateurs. Un résultat possible est donc une paire de sujets choisis parmi ces 18 sujets restants. On note Ω_2 l'ensemble constitué de ces paires de sujets. Comme le deuxième candidat tire ses sujets au hasard, Ω_2 est muni de la probabilité uniforme. $\mathsf{Card}\ \Omega_2 = \binom{18}{2} = 153$. D'autre part A_2 sera réalisé si le deuxième candidat pioche une des 9 paires de sujets d'un même examinateur. Par conséquent $p_{A_1}(A_2) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{1}{17}$. ▲

   b. On en déduit $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) = \dfrac{1}{323}$ ▲

3. Comme $(A_1, \bar{A}_1)$ forme un sytème complet d'événements non négligeables, la formule des probabilités totales donne :
$$p(A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) + p(\bar{A}_1) \times p_{\bar{A}_1}(A_2)$$
   Calculons $p_{\bar{A}_1}(A_2)$. On suppose que le premier candidat n'a pas retiré deux sujets provenant du même examinateur, par conséquent il ne reste que 18 sujets pour ledeuxième candidat dont 16 seulement peuvent être groupés par deux suivant leur auteur. Ainsi, il y a $\binom{18}{2} = 153$ cas possibles pour 8 cas favorables seulement. Il s'en suit que $p_{\bar{A}_1}(A_2) = \dfrac{8}{153}$. Réinjectons ce résultat dans la formule des probabilités totales, il vient :
$$\begin{aligned} p(A_2) &= p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) + p(\bar{A}_1) \times p_{\bar{A}_1}(A_2) \\ &= \frac{1}{323} + \frac{18}{19} \times \frac{8}{153} = \frac{1 + 8 \times 2}{323} = \frac{1}{19}. \end{aligned}$$
   ▲

4. D'après les propriétés générales des probabilités, nous avons
   . $$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{19} - \frac{1}{323} = \frac{33}{323}$$ ▲

Exercice 2 : Le sujet préféré du docteur B.

Ω

A B C

R $\bar{R}$ R $\bar{R}$ R $\bar{R}$

On donne les probabilités suivantes :
- la probabilité pour que ce soit le docteur A. qui pose l'examen, est $p(A) = 0,40$
- la probabilité pour que ce soit le docteur B. qui pose l'examen, est $p(B) = 0,25$
- la probabilité pour que ce soit le docteur C. qui pose l'examen. est $p(C) = 0,35$
- si A pose le sujet, la probabilité d'avoir R est $p_A(R) = 0,10$,
- si B pose le sujet, la probabilité d'avoir R est $p_BA(R) = 0,82$,
- si C pose le sujet, la probabilité d'avoir R est $p_C(R) = 0,40$.

Les événements A, B, C forment un système somplet d'événements non négligeables, par conséquent la formule du **docteur B**ayes [1] donne :

$$\begin{aligned}
p_R(A) &= \frac{p(A)\times p_A(R)}{p(A)\times p_A(R)+p(B)\times p_B(R)+p(C)\times p_C(R)} \\
&= \frac{400}{400+2050+1400} = \frac{400}{3850} = \frac{8}{77} \\
p_R(B) &= \frac{p(B)\times p_B(R)}{p(A)\times p_A(R)+p(B)\times p_B(R)+p(C)\times p_C(R)} = \frac{41}{77} \\
p_R(C) &= \frac{p(C)\times p_C(R)}{p(A)\times p_A(R)+p(B)\times p_B(R)+p(C)\times p_C(R)} = \frac{28}{77}
\end{aligned}$$

▲

EXERCICE 3 : JEU D'URNES

1. J'ai déjà rédigé ça en séance d'exercices, je m'épargne la peine de le taper ici.

a. On montre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\ (n+1)}{2}$. ▲

b. On montre par récurrence que tout entier naturel n non nul $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n\ (n+1)}{2}\right)^2$. ▲

2. On discute le nombre d'urnes suivant la valeur $k \in [\![1, n]\!]$ de l'inscription : il y a k urnes portant le numéro k.

Par conséquent le nombre total d'urnes est $N = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\ (n+1)}{2}$. ▲

3. Dans chaque urne $\mathcal{U}_k$, il y a k boules blanches et $k(k-1)$ boules rouges.
On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule de cette urne. On note pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ U_k l'événement "*l'urne choisie porte le numéro k*".

a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. Un résultat possible est une urne parmi les N urnes possibles. Or il y a exactement k urnes portant le numéro k,
par conséquent, $p(U_k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{k}{N} = \frac{2\ k}{n\ (n+1)}$. ▲

b. Notons B l'événement "*la boule tirée est blanche*". On cherche $p(B)$. Il est clair que les (U_k) forment un système complet d'événements. De plus d'après la question précédente, ces événements sont non négligeables. La formule des probabilités totales s'applique et donne :

$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(U_k) \times p_{U_k}(B)$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé, calculons $p_{U_k}(B)$. Le tirage s'effectue au hasard dans une urne portant le numéro k ce qui indique qu'il y a k boules blanches et $k\ (k-1)$ boules rouges dans cette urne. Ainsi, la probabilité d'obtenir une boule blanche dans une urne portant le numéro k est

$$p_{U_k}(B) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Réinjectons ce résultat dans la formule des probabilités totales, nous obtenons finalement
.
$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} \left(p(U_k) \times p_{U_k}(B)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2\ k}{n\ (n+1)} \times \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{n+1}.$$ ▲

c. On constate que la boule tirée est blanche. Calculons la probabillité que cette boule provienne d'une urne portant le numéro k. Pour cela nous utilisons la formule de ce *bon* docteur Bayes pour *retourner les conditionnements* :

Il vient $p_B(U_k) = \frac{p(B \cap U_k)}{p(B)} = \frac{p(U_k) \times p_{U_k}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{2\ k}{n\ (n+1)} \times \frac{1}{k}}{\frac{2}{n+1}} = \frac{1}{n}$. ▲

[1] vous l'aviez reconnu ?

On décide de vider le contenu de toutes les urnes dans un grand sac. On tire ensuite une boule de ce sac.

4. Nous avons maintenant un grand sac qui contient toutes boules. L'univers des possibles Ω est donc l'ensemble des boules. Le tirage se faisant au hasard dans le sac, Ω est muni de la probabilité uniforme.
Dénombrons tout d'abord Ω . Comme nous l'avons déjà noté chaque urne portant le numéro k contient k^2 boules, comme il y a k exemplaires de l'urne $\mathcal{U}_k$, il vient :

$$\text{Card } \Omega = \sum_{k=1}^{n} k \times k^2 = \left(\frac{n\ (n+1)}{2}\right)^2$$

ainsi que vous l'avez démontré en question de cours.
A présent dénombrons l'ensemble B des boules blanches. Chaque urne portant le numéro k en contient k, comme il y a k exemplaires de l'urne $\mathcal{U}_k$, il vient :

$$\text{Card } \mathbb{B} = \sum_{k=1}^{n} k \times k = \frac{n\ (n+1)(2n+1)}{6}$$

D'où finalement :
$$p(B) = \frac{\frac{n\ (n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2\ (n+1)^2}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{2n+1}{n\ (n+1)}.$$
▲

Problème 1 : Jouons avec des jetons !

1.

Ω

D_1 U_1 G_1

D_2 U_2 G_2 D_2 U_2 G_2 D_2 U_2 G_2

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit les événements :
- D_n *"le $n^{\text{ème}}$ tirage a lieu, et à la fin l'urne contient 2 jetons verts"*
- U_n *"le $n^{\text{ème}}$ tirage a lieu, et à la fin l'urne contient 1 jeton vert"*
- G_n *"le $n^{\text{ème}}$ tirage a lieu, et à la fin l'urne ne contient plus de jetons verts"*

On note d_n, u_n et g_n les probabilités respectives de D_n, U_n et G_n. De plus nous définissons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'événement : V_n *"le jeton tiré au $n^{\text{ième}}$ tirage est VERT"*

2. Initialement, l'urne contient deux jetons verts, par conséquent :

a. $D_1 = \bar{V}_1$. Le tirage se faisant au hasard dans l'urne, $d_1 = p(D_1) = p(\bar{V}_1) = \dfrac{3}{5}$

b. $U_1 = V_1$. Le tirage se faisant au hasard dans l'urne, $u_1 = p(U_1) = p(V_1) = \dfrac{2}{5}$

c. $G_1 = \emptyset$, par conséquent, $g_1 = p(G_1) = 0$

On peut ensuite en déduire les valeurs de d_2, u_2 et g_2 en remarquant que D_1, U_1 et G_1 forment un système complet d'événements. Nous obtenons :

a. $p(D_2) = p(D_2 \cap D_1) + p(D_2 \cap U_1) + p(D_2 \cap G_1) = p(D_2 \cap D_1)$ Or $p(D_1) > 0$ aussi pouvons-nous écrire

$$p_2 = p(D_2 \cap D_1) = p(D_1) \times p_{D_1}(D_2) = p(D_1) \times p_{D_1}(\bar{V}_2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

b. $p(U_2) = p(U_2 \cap D_1) + p(U_2 \cap U_1) + p(U_2 \cap G_1) = p(U_2 \cap D_1) + p(U_2 \cap U_1)$ Comme $p(D_1)$ et $p(U_1)$ sont non nuls, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} p(U_2 \cap D_1) &= p(D_1) \times p_{D_1}(U_2) = p(D_1) \times p_{D_1}(V_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \\ p(U_2 \cap U_1) &= p(U_1) \times p_{U_1}(U_2) = p(U_1) \times p_{U_1}(\bar{V}_2) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Finalement
$$u_2 = p(U_2 \cap D_1) + p(U_2 \cap U_1) = \frac{14}{25}$$

c. $p(G_2) = p(G_2 \cap D_1) + p(G_2 \cap U_1) + p(G_2 \cap G_1) = p(G_2 \cap U_1)$ Comme $p(U_1)$ est non nul, nous pouvons écrire :

$$g_2 = p(G_2 \cap U_1) = p(U_1) \times p_{U_1}(G_2) = p(U_1) \times p_{U_1}(V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

▲

3. On peut remarquer que pour que D_n soit réaliser, il faut q'à chaque tirage précédent on tire un jeton blanc. Montrons par récurrence que $d_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Initialisation : ainsi que nous l'avons démontré à la question précédente $d_1 = \frac{3}{5}$

hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $d_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Pour calculer d_{n+1} nous utilisons le fait que D_n , U_n et G_n forme un système complet d'événements. Il vient par additivité :

$$d_{n+1} = p(D_{n+1} \cap D_n) + p(D_{n+1} \cap U_n) + p(D_{n+1} \cap G_n)$$

Les événements D_{n+1}, U_n et G_n étant deux à deux incompatibles, il en résulte que $d_{n+1} = p(D_{n+1} \cap D_n)$. Or par hypothèse de récurrence, $p(D_n) > 0$ d'où :

$$d_{n+1} = p(D_{n+1} \cap D_n) = p(D_n) \times p_{D_n}(D_{n+1}) = p(D_n) \times p_{D_n}(\bar{V}_{n+1}) = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

Conclusion : Par récurrence nous avons montré que $d_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$. ▲

Remarque : Ici, l'utilisation de la formule des probas composées est rendue délicate car nous ne pouvons pas *a priori* assurer la *non-négligeabilité* des conditionnements.

4. **a**. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

- **i**. $p(U_{n+1}|U_n) = p_{U_n}(\bar{V}_{n+1}) = \frac{4}{5}$
- **ii**. $p(U_{n+1}|D_n) = p_{D_n}(V_{n+1}) = \frac{2}{5}$
- **iii**. $p(U_{n+1}|G_n) = 0$ car les événements U_{n+1} et G_n sont incompatibles.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. Les événements D_n , U_n et G_n forment un système complet d'événements. Par additivité il s'en suit que $u_{n+1} = p(U_{n+1} \cap D_n) + p(U_{n+1} \cap U_n) + p(U_{n+1} \cap G_n)$. Or, les événements U_{n+1} et G_n sont incompatibles, tandis que les événements D_n et U_n sont non négligeables. En uttilisant les résultats de la questionprécédente, il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p(D_n) \times p_{D_n}(U_{n+1}) + p_{U_n}(U_{n+1}) = p(D_n) \times p_{D_n}(V_{n+1}) + p_{U_n}(\bar{V}_{n+1}) \\ &= \frac{2}{5}d_n + \frac{4}{5}u_n \end{aligned}$$

▲

5. **a**. Soit (a_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = u_n + 2\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Montrons que la suite (a_n) est une suite géométrique : soit $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimons a_{n+1} en fonction de a_n. D'après la question précédente, nous avons :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \left(\frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{4}{5}u_n + \frac{8}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{4}{5}\left\{u_n + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \frac{4}{5}\, a_n. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_{n+1} = (4/5)\, a_n$, ce qui prouve que (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$. ▲

b. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ $a_n = a_1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Comme $u_n = a_n - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$, il en découle finalement que pour tout entier naturel non nul n, u_n est donné par la formule :

$$u_n = 2 \times \left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = 2 \times \frac{4^n - 3^n}{5^n}.$$ ▲

6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En utlisant une fois de plus que les événements D_n , U_n et G_n forment un système complet d'événements ainsi que l'incompatibilité de G_{n+1} avec D_n et G_n, nous obtenons
$g_{n+1} = p(G_{n+1} \cap U_n) = p(U_n) \times p_{U_n}(G_{n+1}) = u_n \times p_{U_n}(V_{n+1}) = \dfrac{1}{5}u_n.$

Par conséquent, $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ g_n = \frac{u_{n-1}}{5} = 2 \times \frac{4^{n-1} - 3^{n-1}}{5^n}$$ ▲

Problème 2 : Partitions en paires ou singletons

Partie I. Partitions non ordonnées en paires

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout ensemble fini E de cardinal $2n$, on note a_n le nombre de partitions non ordonnées de E en paires.

1. Pour déterminer a_1 et a_2 , je dersse la liste de toutes les partitions en paires de $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_4$:

- **a**. il n'y a qu'une partition en paires de $\mathbb{F}_2$: il s'agit de $\{\{1, 2\}\}$
- **b**. il y a 3 partitions en paires de $\mathbb{F}_4$
  - $\{\{1, 2\}; \{3, 4\}\}$
  - $\{\{1, 3\}; \{2, 4\}\}$
  - $\{\{1, 4\}; \{3, 2\}\}$
- **c**. Avant de calculer a_3, je procède par étapes [2] pour dénombrer le nombre de partitions *ordonnées* de $\mathbb{F}_6$ en paires.
  - je choisis une *première* paire $\rightsquigarrow \binom{6}{2}$ possibilités
  - je choisis une *deuxième* paire $\rightsquigarrow \binom{4}{2}$ possibilités
  - je choisis une *troisième* paire $\rightsquigarrow \binom{2}{2}$ possibilités

  Au total il y a 90 partitions *ordonnées* de $\mathbb{F}_6$. Comme a_3 désigne le nombre de partitions non ordonnées de F_6 en paires, il faut - d'après le ppe des Bergers- diviser ce résultat par $3! = 6$, il vient : $a_3 = 15$. ▲

2. On suppose que $n \geq 2$ et on considère l'ensemble $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$. Je dénombre l'ensemble des partitions en paires non ordonnées de E en discutant suivant la paire qui contient x_1 :

- je choisis l'élément x de E qui fait la paire avec x_1 $\rightsquigarrow \binom{2n-1}{1}$ possibilités
- Il me reste à partitionner l'ensemble $E \setminus \{x_1, x\}$ en paires non ordonnées $\rightsquigarrow a_{n-1}$ possibilités

Au total, il y a donc $(2n-1) \times a_{n-1}$ partitions de E en paires non ordonnées. ▲

3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star\ a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}$

Initialisation : look at question **1.**

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}$. On utilise la question **2.** pour calculer a_{n+1} :

$$\begin{aligned} 2^{n+1}(n+1)! \times a_{n+1} &= 2^{n+1}(n+1)! \times (2n+1) \times a_n = 2\ (n+1)\ (2n+1) \times 2^n\ n! \times \frac{(2n)!}{2^n\ n!} \\ &= (2n+2)(2n+1) \times (2n)! = (2n+2)! \end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence, nous avons démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^\star\ a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}$. ▲

Partie II. Partitions non ordonnées en paires ou singletons

1. Je dresse la liste des partitions en paires ou singletons non ordonnées de $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$:

- **a**. Il n'y a qu'une partition de $\mathbb{F}_1$ en paires ou singleton : $\{\{1\}\}$.
- **b**. Il y a deux partitions de $\mathbb{F}_2$ en paires ou singletons : $\{\{1\}; \{2\};\}$ et $\{\{1; 2\};\}$

[2] la liste des 15 partitions en paires de $\mathbb{F}_6$ est un peu fastidieuse à écrire...

c. I y a 4 partitions en paires ou singletons de $\mathbb{F}_3$:

- $\{\{1\};\{3;2\}\}$
- $\{\{2\};\{1;3\}\}$
- $\{\{3\};\{1;2\}\}$
- $\{\{1\};\{2\};\{3\}\}$

2. On suppose que $m \geq 3$ et on considère l'ensemble $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Dénombrons l'ensemble des partitions de F en paires ou singletons en discutant suivant la paire ou le singleton de F contenant y_1 :

- Si y_1 est tout seul dans un singleton :
  - je choisis le singleton $\{y_1\}$ $\rightsquigarrow$ 1 possibilité
  - je choisis une partition en paires ou singletons de $F\backslash\{y_1\}$ $\rightsquigarrow$ b_{m-1} possibilités
- Si y_1 apparaît dans une paire :
  - je choisis la paire $\{y_1, y\}$ $\rightsquigarrow$ $(m-1)$ possibilités
  - je choisis une partition en paires ou singletons de $F\backslash\{y_1; y\}$ $\rightsquigarrow$ b_{m-2} possibilités

Au total, il y a b_{m-1} partitions en paires ou singleton pour lesquelles y_1 apparaît en singleton et $(m-1) \times b_{m-2}$ partitions pour lesquelles y_1 apparît dans une paire, d'où
.
$$b_m = b_{m-1} + (m-1) \times b_{m-2}.$$
▲

3. On suppose dans cette question, que $m = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$. Dénombrons l'ensemble des partitions de F en paires ou singletons en discutant suivant le nombre de singletons.
On peut remarquer qu'il y a nécessairement un nombre pair de singletons dans un partition de F. On discute suivant la valeur $2k$, avec $k \in [\![0, p]\!]$, du nombre de singletons dans la partition :

- je choisis $2k$ **singletons** $\rightsquigarrow$ $\binom{2p}{2k}$ possibilités
- je choisis une partition **en paires** du complémentaire $\rightsquigarrow$ a_{p-k} possibilités

Au total,
$$b_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} a_{p-k} = \frac{(2p)!}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{(2k)!\,(p-k)!}$$
▲

4. On suppose dans cette question que $m = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$. Dénombrons l'ensemble des partitions de F en paires ou singletons en discutant suivant le nombre de singletons.
On peut remarquer qu'il y a nécessairement un nombre impair de singletons dans un partition de F. On discute suivant la valeur $2k+1$, avec $k \in [\![0, p]\!]$, du nombre de singletons dans la partition :

- je choisis $2k+1$ **singletons** $\rightsquigarrow$ $\binom{2p+1}{2k+1}$ possibilités
- je choisis une partition **en paires** du complémentaire $\rightsquigarrow$ a_{p-k} possibilités

Au total,
$$b_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} a_{p-k} = \frac{(2p+1)!}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{(2k+1)!\,(p-k)!}$$
▲