Corrigé du Devoir Surveillé n° 4

Exercice 1 : dénombrement

Notons $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$. Une combinaison pour le cadenas est un *mot* de quatre lettres choisies dans l'*aphabet* $\mathcal{A}$. L'ensemble des combinaisons est représenté par $M = \mathcal{A}^4$.

1. Notons M_1 l'ensemble des combinaisons à une seule lettre. $\mathsf{Card}\ M_1 = 4$. ▲

2. Notons M_2 l'ensemble des combinaisons avec exactement deux lettres différentes.
Un mot de M_2 écrit avec deux lettres différentes x, y est de l'un des deux types suivants
either x apparaît trois fois et y une fois.
or x et y apparaissent chacun deux fois.
Pour dénombrer M_1 je distingue ces deux cas.

- L'une des deux lettres apparaît trois fois.
  - je choisis un **couple** de lettres différentes (x, y) $\rightsquigarrow A_4^2 = 12$ possibilités.
    Je conviens que x sera répété deux fois.
  - je place la lettre y $\rightsquigarrow \binom{4}{1} = 4$ possibilités.
- Chacune des deux lettres apparaît deux fois.
  - je choisis une **paire** de lettres différentes $\{x, y\}$ $\rightsquigarrow \binom{4}{2} = 6$ possibilités.
  - je place la lettre x à deux endroits différents dans le mot $\rightsquigarrow \binom{4}{2} = 6$ possibilités.

  Au total, $\mathsf{Card}\ M_2 = 12 \times 4 + 6 \times 6 = 84.$ ▲

3. Notons M_3 l'ensemble des combinaisons écrites avec exactement trois lettres différentes.
Dans une combinaison écrite avec trois lettres différentes x, y, z, l'une de ces lettres est répétée une fois, les deux autres n'apparaissent qu'une fois. Pour dénombrer M_3, je procède par étapes :

- je choisis trois lettres différentes $\{x, y, z\}$ $\rightsquigarrow \binom{4}{3} = 4$ possibilités.
- je choisis la lettre qui sera répétée $\rightsquigarrow \binom{3}{1} = 3$ possibilités.
- je place les deux lettres qui n'apparaissent qu'une fois dans le mot. $\rightsquigarrow A_4^2 = 12$ possibilités.
  Les places pour la lettre répétée sont dès lors entièrement détérminées.

Au total, $\mathsf{Card}\ M_3 = 4 \times 3 \times 12 = 144.$ ▲

4. Notons M_4 l'ensemble des combinaisons écrites avec exactement quatre lettres différentes.
Un mot de M_4 correspond à une permutation des quatre lettres de l'alphabet $\mathcal{A}$.
Par conséquent $\mathsf{Card}\ M_4 = 4! = 24.$ ▲

Exercice 2 : racines carrées et factorisations

On considère $P = X^6 - i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Notons $\alpha = \dfrac{i + \sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{i - \sqrt{3}}{2}$.
Cherchons les racines carrées de α sous forme algébrique.
$x + iy$ est racine de carrée de α si et seulement si (x, y) est solution du système (S) $\left\{\begin{array}{lcl} x^2 + y^2 & = & |\alpha| \\ x^2 - y^2 & = & \mathfrak{Re}\,\alpha \\ 2xy & = & \mathfrak{Im}\,\alpha \end{array}\right.$ Or

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2 + y^2 & = & 1 \\ x^2 - y^2 & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ xy & > & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2 & = & \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ y^2 & = & \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ xy & > & 0 \end{array}\right.$$

Par conséquent, les racines carrées de α sont $\pm\ \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.
On montre en procédant exactement de la même manière que les racines carrées de β sont :

. $$\pm\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$ ▲

2. Posons la division euclidienne de P par X^2+i.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & X^6 & & & -i & X^2+i \\
\cline{6-6}
-(& \underline{X^6} & \underline{+iX^4} &) & & X^4-iX^2-1 \\
 & & -iX^4 & & -i & \\
-(& & \underline{-iX^4} & \underline{+X^2} &) & \\
 & & & -X^2 & -i & \\
 & & -(& \underline{-X^2} & \underline{-i)} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Par conséquent
$$P=(X^2+i)\times(X^4-iX^2-1).$$
Soit $Q=X^4-iX^2-1$. Cherchons les racines de Q. Remarquons que l'équation (1) $\quad\tilde{Q}(z)=0$ est une équation *bi-carrée* :
$$z \text{ est solution de (1) } \textit{si et seulement si } z^2 \text{ est solution de (2) } w^2-iw-1=0.$$
Résolvons l'équation (2) : Le discriminant de cette équation du deuxième degré est $\Delta=-1-4\times(-1)=3$. Par conséquent les solutions de (2) sont précisément :
$$\alpha=\frac{i+\sqrt{3}}{2} \text{ et } \beta=\frac{i-\sqrt{3}}{2}.$$
Résolvons l'équation (1) : ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, les solutions de (1) sont les racoines carrées des solutions de (2). Par conséquent les racines de Q sont :
$$\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},\quad \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$
Notons $\gamma=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Les racines de Q sont $\gamma, i\gamma, -\gamma$, et $-i\gamma$.
Comme d'autre part les racines de X^2+i sont les racines carrées de $-i=e^{-i\pi/2}$, l'ensemble des racines de P est :
$$\mathcal{S}=\{e^{-i\pi/4},-e^{-i\pi/4},\gamma,i\gamma,-\gamma,-i\gamma\}$$
En remarquant que le coefficient dominant de P est 1, il s'en suit que
$$P=(X-e^{-i\pi/4})\times(X+e^{-i\pi/4})\times(X-\gamma)\times(X-i\gamma)\times(X+\gamma)\times(X+i\gamma)$$

$\blacktriangle$

3. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^6=i.$$
Ecrivons tout d'abord $i=e^{i\pi/2}$. Une solution particulière de cette équation est donnée par $e^{i\pi/12}$.
D'autre part, les racines sixièmes de l'unité sont $\mathbb{U}_6=\{1,-1,j,-j,j^2,-j^2\}$.
Par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation $z^6=i$ est
$$\mathcal{S}=\{e^{i\pi/12},-e^{i\pi/12},je^{i\pi/12},-je^{i\pi/12},j^2e^{i\pi/12},-j^2e^{i\pi/12}\}$$
Il en résulte que P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme :
$$P=(X-e^{i\pi/12})\times(X+e^{i\pi/12})\times(X-je^{i\pi/12})\times(X+je^{i\pi/12})\times(X-j^2e^{i\pi/12})\times(X+j^2e^{i\pi/12})$$

$\blacktriangle$

4. Nous avons calculé l'ensemble $\mathcal{S}$ des racines de P de deux manières différentes, nous en déduisons que
$$\mathcal{S}=\{e^{i\pi/12},-e^{i\pi/12},je^{i\pi/12},-je^{i\pi/12},j^2e^{i\pi/12},-j^2e^{i\pi/12}\}=\{e^{-i\pi/4},-e^{-i\pi/4},\gamma,i\gamma,-\gamma,-i\gamma\}$$
En particulier $e^{i\pi/12}\in\{e^{-i\pi/4},-e^{-i\pi/4},\gamma,i\gamma,-\gamma,-i\gamma\}$. En remarquant que les parties réelle et imaginaires de $e^{i\pi/12}$ sont positives, il vient : $e^{i\pi/12}=\gamma$.

Finalement, en identifiant les parties réelles de cette égalité, nous obtenons $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. $\blacktriangle$

Exercice 3 : Calcul de sommes

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, un entier naturel non nul , a et x des réels. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kx)$$

1. Notons $\Sigma_n = S_n + i\, T_n$. Alors

$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx) + i \sin(a+kx) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kx)} = \sum_{k=0}^{n} e^{ia} \times e^{ikx} = e^{ia} \times \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k.$$

Avant de commettre l'*irréparable* division par 0, je distingue deux cas :

- Si $x \equiv 0[2\pi]$ alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(e^{ix})^k = 1$, de sorte que

$$\boxed{\Sigma_n = (n+1)e^{ia}}$$

- Si $x \not\equiv 0[2\pi]$ alors Σ_n est e^{ia} multiplié par la somme des $n+1$ premiers termes d'une suité géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$. D'où :

$$\Sigma_n = e^{ia} \times \frac{1-\left(e^{ix}\right)^n + 1}{1-e^{ix}} = e^{ia} \times \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

Finalement la formule d'Euler pour le sin donne :

$$\boxed{\Sigma_n = e^{i(a+nx/2)} \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}}$$

▲

2. En identifiant les parties réelle et imaginaire des égalités encadrées, j'obtiens :

- Si $x \equiv 0[2\pi]$

$$S_n = (n+1)\cos a \text{ et } T_n = (n+1)\sin a$$

- Si $x \not\equiv 0[2\pi]$

$$S_n = \frac{\cos\left(a+\frac{n}{2}x\right)\ \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{\sin\left(a+\frac{n}{2}x\right)\ \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

▲

Exercice 4 : Equation polynômiale de degré n

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère l'équation :

$$(1) \qquad \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$

1. Supposons que z soit solution de (1), alors en identifiant les modules des deux membres de cette égalité, j'obtiens que $\left|\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n\right| = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$. D'après les propriétés de compatibilité du module avec le produit, il en résulte que $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^n = 1$. L'application puissance $n^{\text{ième}}$ étant bijective de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans lui-même, il en résulte que

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$$

▲

2. Soit z une solution de (1). D'après la question précédente, $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|^2 = 1$. Or

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = 1 \quad &\iff \quad (z-i)(\bar{z}+i) = (\bar{z}-i)(z+i)\\
&\iff \quad |z|^2 - i\bar{z} + iz + 1 = |z|^2 - iz + i\bar{z} + 1\\
&\iff \quad 2i(z-\bar{z}) = 0\\
&\iff \quad z = \bar{z}.
\end{aligned}$$

Ainsi toute solution z de (1) vérifie $z = \bar{z}$, i.e. $z \in \mathbb{R}$. ▲

3. Lorsque $a = 1$, remarquons que $\frac{1+i}{1-i} = e^{i\pi/2} = i$. En ce cas

z est solution de (1) *si et seulement si* $z \neq -i$ et $\dfrac{z-i}{z+i}$ est solution de l'équation :

(2) $$w^n = i$$

D'après l'étude du cas général, nous savons que la condition $z \neq -i$ est automatiquement *fulfilled* puisque toute solution de (1) est réelle.

Résolvons l'équation (2) : notons que les solutions de cette équation sont simplement les racines $n^{\text{ièmes}}$ de i.

- une racine $n^{\text{ième}}$ particulière de i est $e^{i\frac{\pi}{2n}}$.
- les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sont

$$\mathbb{U}_n = \{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$$

Par conséquent les racines $n^{\text{ièmes}}$ de i sont

$$\mathcal{U}_n = \{e^{i\frac{\pi}{2n}}, e^{i\frac{5\pi}{2n}}, e^{i\frac{9\pi}{2n}}, \dots, e^{i\frac{(4n-3)\pi}{2n}}\} = \{e^{i\frac{4k+1}{2n}\pi}\ ;\ k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Résolvons l'équation (1) : Afin d'alléger l'écriture, notons pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k = \dfrac{4k+1}{2n}\pi \not\equiv 0[2\pi]$. Ainsi que nous l'avons remarqué, les solutions de l'équation (1) sont toutes *réelles*. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de (1)} \quad &\iff \quad \frac{x-i}{x+i} \text{ est solution de (2)}\\
&\iff \quad \frac{x-i}{x+i} \in \mathcal{U}_n\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ \frac{x-i}{x+i} = e^{i\theta_k}\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ x - i = xe^{i\theta_k} + ie^{i\theta_k}\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ x(1-e^{i\theta_k}) = i(1+e^{i\theta_k})\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ x = i\,\frac{1+e^{i\theta_k}}{1-e^{i\theta_k}}\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ x = i\frac{e^{i\theta_k/2}}{e^{i\theta_k/2}}\ \frac{2\cos(\theta_k/2)}{-2i\sin(\theta_k/2)}\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!];\ x = -\cot\left(\frac{\theta_k}{2}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (1) est :

$$\left\{-\cot\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

▲

Exercice 6 : De tout ...

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par :

$$P_n = 1 + X + \cdots + X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

1.

$$(X-1)\times P_n = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \sum_{k=1}^{n} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} X^k = X^n - 1.$$

▲

2. Par conséquent, les polynômes $(X-1)P_n$ et X^n-1 ont les mêmes zéros. En particulier, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité différentes de 1 sont des zéros de P_n. Nous avons donc trouvé $n-1$ racines distinctes de P_n.
Comme P_n est de degré $n-1$, il possède au plus $n-1$ racines distinctes. Par conséquent il ne peut posséder d'autres racines que celles que nous avons déjà trouvé :
L'ensemble des racines de P_n est $\{\omega^k;\ k\in [\![1,n-1]\!]\}$, formé des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité **différentes de 1**. ▲

3. Notons $S_n = 1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}$.
Remarquons que $P'_n = \sum_{k=0}^{n-1} kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)X^k$, de sorte que $S_n = n\omega^{n-1} + \tilde{P}'_n(\omega)$. Or, d'après la première question, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\tilde{P}_n(z) = \dfrac{z^n-1}{z-1}$. Ainsi

$$\tilde{P}'_n(z) = \frac{nz^{n-1}\ (z-1)-(z^n-1)}{(z-1)^2}$$

En particulier, $\tilde{P}'_n(\omega) = \dfrac{n(1-\omega^{n-1})}{(\omega-1)^2}$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} S_n &= n\omega^{n-1}+\tilde{P}'_n(\omega) = n\ \frac{1-\omega^{n-1}}{(\omega-1)^2} + n\omega^{n-1} \\ &= n\ \frac{1-\omega^{n-1}+(1-2\omega+\omega^2)\omega^{n-1}}{(\omega-1)^2} \\ &= n\ \frac{\omega-1}{(\omega-1)^2} = \frac{n}{\omega-1}. \end{aligned}$$

▲

4. On se place désormais dans le cas particulier où $n=5$.

a. Les racines complexes de P_5 sont $\{e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\}$. Comme P_5 est à coefficients réels, ces racines sont ou bien réelles, ou bien 2 à 2 complexes conjuguées. On vérifie aisément[1] que $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}}$ sont conjuguées ainsi que $e^{i\frac{4\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Nous en déduisons les factorisations suivantes pour P_5 :

$$\begin{aligned} P_5(X) &= \big(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\big)\times\big(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\big)\times\big(X-e^{i\frac{6\pi}{5}}\big)\times\big(X-e^{i\frac{8\pi}{5}}\big) \\ &= \big(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\big)\times\big(X-e^{-i\frac{2\pi}{5}}\big)\times\big(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\big)\times\big(X-e^{-i\frac{4\pi}{5}}\big) \\ &= \big(X^2-2\cos\frac{2\pi}{5}\ X+1\big)\times\big(X^2-2\cos\frac{4\pi}{5}\ X+1\big). \end{aligned}$$

La facorisation de P_5 dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$P_5 = 1+X+X^2+X^3+X^4 = \big(X^2-2\cos\frac{2\pi}{5}\ X+1\big)\times\big(X^2-2\cos\frac{4\pi}{5}\ X+1\big).$$

▲

b. En identifiant dans l'égalité ci-dessus les coefficients de X^2, j'obtiens $1 = 4\ \cos(\frac{2\pi}{5})\times\cos(\frac{4\pi}{5})+2$.
D'où je tire $\qquad \cos(\dfrac{2\pi}{5})\times\cos(\dfrac{4\pi}{5}) = -\dfrac{1}{4}$. ▲

c. Notons $\mathfrak{S} = 1+\cos(\dfrac{2\pi}{5})+\cos(\dfrac{4\pi}{5})+\cos(\dfrac{6\pi}{5})+\cos(\dfrac{8\pi}{5})$. Il est clair que $\mathfrak{S} = \mathfrak{Re}\,\Big(P_5(e^{i\frac{2\pi}{5}})\Big) = 0$. ▲

d. Comme de plus $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{8\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \cos(\frac{6\pi}{5})$, j'en déduis que $1+2\big(\cos(\frac{2\pi}{5})+\cos(\frac{4\pi}{5})\big) = 0$,
d'où je tire finalement $\qquad \cos(\dfrac{2\pi}{5})+\cos(\dfrac{4\pi}{5}) = -\dfrac{1}{2}$. ▲

e. D'après les questions précédentes, $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ sont les racines de l'équation $X^2-SX+P=0$, où $S=-1/2$ et $p=-1/4$. Notons

$$P = X^2+1/2X-1/4$$

[1] calculez la somme des arguments *modulo* 2π

f. Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $\Delta = 5/4$, donc P possède les racines $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. J'en déduis les valeurs de exactes de $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{4\pi}{5})$:

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4},$$

puis les valeurs exactes de $\sin(\frac{2\pi}{5}) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})}$ et $\sin(\frac{4\pi}{5}) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{4\pi}{5})}$. ▲