Corrigé du Devoir Surveillé n° 5

Problème 1 : Un produit rigolo sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition : *Pour toutes suites numériques $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, on définit la suite $u \star v = w$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}.$$

Partie I. Exemples

1. **Premiers exemples**

   a. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = 2$ et $v_k = 3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} 2 \times 3 = 6(n+1)$$
   b. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = 2^k$ et $v_k = 3^k$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \times 3^{n-k} = \frac{2^{n+1} - 3^{n+1}}{2-3} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$
   c. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{2^k}{k!}$ et $v_k = \frac{3^k}{k!}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \times 3^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} = \frac{5^n}{n!}$$

   ▲

2. **Programmation**
   Dans cette question, les suites u et v sont définies par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1) \ \text{ et } \ v_n = \frac{1}{n+1}.$$

```
Program etoile ;
var  n,k : integer ;
     w : real ;
begin
     write('Entrez le rang n = ') ;
     readln ( n ) ;
     w := 0 ;
     for  k :=0 to n do  w := w + (Ln(k+1)/(n-k+1)) ;
     writeln ('U*V_',n, '=' , w ) ;
     readln ;
end .
```

   ▲

3. **Un résultat de convergence**
   Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante *à partir du rang 1* et de limite nulle.

   a. Soit (n, m) un couple d'entiers naturels tels que $n < m$, alors :
   $$\sum_{k=n+1}^{m} u_k = \sum_{k=n+1}^{m} (1/2)^k = (1/2)^{n+1} \sum_{k=0}^{m-n-1} (1/2)^k = (1/2)^{n+1}\, \frac{1-(1/2)^{n+2}}{1/2} \leq 2 \times (1/2)^{n+1} \leq u_n$$

   ▲

b. Soit n un entier strictement supérieur à 1.

- Afin de majorer w_{2n}, écrivons

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} + v_0 u_{2n}$$

  - Montrons que $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} \leq 2v_n$
    Soit $k \in [\![0, n]\!]$, alors comme v est décroissante à partir du rang 1, $v_{2n-k} \leq v_n$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} \leq v_n \sum_{k=0}^{n} (1/2)^k \leq v_n \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1/2} \leq 2v_n.$$

  - Montrons que $\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} \leq v_1 u_n$
    Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, alors comme v est décroissante à partir du rang 1, $v_{2n-k} \leq v_1$. En sommant cette inégalité, nous obtenons facilement que

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} \leq v_1 \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k$$

    D'autre part, comme $n > 1$, on vérifie immédiatement que $2n-1 > n$. Par suite, nous pouvons appliquer le résultat de la question précédente avec $m = 2n-1$. Il vient $\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leq u_n$. Finalement, nous obtenons l'estimation :

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} \leq v_1 \; u_n$$

  Des inégalités ci-dessus, nous déduisons l'estimation désirée :

$$\boxed{w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n}$$

- Afin de majorer w_{2n+1}, procédons de manière analogue : écrivons tout d'abord

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n+1-k} + v_0 u_{2n+1}$$

  - $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n+1-k} \leq 2v_{n+1}$
    En effet, si $k \in [\![0, n]\!]$, alors comme v est décroissante à partir du rang 1, il vient $v_{2n+1-k} \leq v_n$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n+1-k} \leq v_{n+1} \sum_{k=0}^{n} (1/2)^k \leq v_{n+1} \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1/2} \leq 2v_{n+1}.$$

  - $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n+1-k} \leq v_1 u_n$
    Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, alors comme v est décroissante à partir du rang 1, $v_{2n+1-k} \leq v_1$. En sommant cette inégalité, nous obtenons

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n+1-k} \leq v_1 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq v_1 \; u_n$$

  Des inégalités ci-dessus, nous déduisons l'estimation désirée :

$$\boxed{w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n}$$

c. Comme les suites u et v sont convergentes de limite nulle, nous déduisons des propriétés algébriques des suites convergentes de limite nulle :

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad w_{2n} \quad &\leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ 0 \leq \quad w_{2n+1} \quad &\leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence par encadrement, il s'en suit que les suites extraites de w formées des termes de rang pairs et impairs sont toutes deux convergentes de limite nulle. Par conséquent, la suite w elle-même est convergente de limite nulle. ▲

d. Soit b la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-1)^n\ u_n$.

$$\begin{aligned} |(b\star v)_n| &\leq \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k\ v_{n-k}\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|(-1)^k u_k\ v_{n-k}\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} u_k\ v_{n-k} = (b\star v)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence par comparaison (en 0), il en résulte que la suite $b\star v$ est convergente de limite nulle. ▲

Partie II. Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \ a_{n+1} \leq \frac{1}{2}\big(a_n + a_{n-1}\big)$$

1. • Soient a une suite décroissante de réels positifs, et $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_n \leq \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \leq \big(a_n + a_{n-1}\big).$$

Par conséquent a appartient à $\mathcal{A}$. ▲

• Soient a une suite strictement croissante de réels, alors

$$a_2 > a_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_1 > \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_0.$$

Par conséquent a n'appartient pas à $\mathcal{A}$. ▲

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}\big(z_n + z_{n-1}\big)$.

a. La suite z est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est :

$$\text{(EC)} \qquad r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

1 et $-1/2$ sont racines évidentes : par conséquent, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b. Choisissons $\lambda = \mu = 1$. La suite z ainsi obtenue est clairement **positive et non monotone**. Pourtant elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ z_{n+1} = \frac{1}{2}\big(z_n + z_{n-1}\big) \leq \frac{1}{2}\big(z_n + z_{n-1}\big).$$

▲

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{A}$ et b la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \big(-\frac{1}{2}\big)^n$.

On définit alors la suite $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, par construction de la suite c et par définition de $\mathcal{A}$, nous avons :

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \big(a_{n+1} + \frac{1}{2}\ a_n\big) - \big(a_n + \frac{1}{2}\ a_{n-1}\big) \\ &= a_{n+1} - \frac{1}{2}\ a_n - \frac{1}{2}\ a_{n-1} \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite c est décroissante à partir du rang 1. Comme la suite a est positive, la suite v est elle aussi minorée par 0. Par conséquent elle est convergente. Notons $\ell(\geq 0)$ sa limite. ▲

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} c_{n-k} &= a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k c_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\big(a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}\big)\\
&= a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \times \frac{1}{2}a_{n-k-1} = a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}a_{n-k-1}\\
&= a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} - \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k} = a_0 b_n + b_0 a_n - a_0 b_n = a_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent $a = b \star c$. ▲

c. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$. D'après la question **3. a.**, la suite ε est décroissante à partir du rang 1 et convergente de limite nulle. D'après le résultat de convergence établi à la **Partie I**, la suite ε est convergente de limite nulle. ▲

d. On désigne par d la suite $b \star \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors

$$\begin{aligned}
d_n &= \big(b \star (c-\ell)\big)_n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} b_k(c_{n-k} - \ell) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \big(b_k c_{n-k} - b_k\ell\big) = (b\star c)_n - \ell \sum\nolimits_{k=0}^{n} b_k\\
&= (b\star c)_n - \ell\,\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(\frac{1}{2})} = a_n - \frac{2}{3}\ell\big(1-(-\frac{1}{2})^{n+1}\big).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = d_n + \frac{2}{3}\ell\big(1 - b_{n+1}\big)$$

Comme les suites b et d sont convergentes vers 0, nous déduisons des propriétés algébraiques des suites convergentes que la suite a est convergente de limite $\dfrac{2}{3}\ell$. ▲

EXERCICE 1 : PROBABILITÉS

Soient $N \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul,$a \in [\![0, N]\!]$ un entier compris entre 0 et N $p \in]0, 1[$, $p \neq \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p$.
On note pour tout $n \in N$, x_n l'abscisse de la particule à l'issue du $n^{\text{ième}}$ saut, de sorte que :

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec la probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le processus s'arrête dès que la particule atteint l'une des extrémités du segment $[\![0, N]\!]$.

1. Pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, on note Q_a l'événement "*la particule, initialement située en a, s'arrête en* 0", et q_a la probabilité de Q_a.

a. Soit $a \in [\![1, N-1]\!]$ fixé. Notons G_1 (respectivement D_1) l'événement "*le premier saut se fait vers la gauche*" (respectivement "*vers la droite*"). La formule des probabilités totales pour le système complet d'événements (G_1, D_1) donne :

$$p(Q_a) = p(Q_a|G_1) \times p(G_1) + p(Q_a|D_1) \times p(D_1)$$

Or par construction, $p(Q_a|G_1) = q_{a-1}$, $p(Q_a|D_1) = q_{a+1}$, $p(G_1) = q$ et $p(D_1) = p$. Par conséquent, nous avons obtenu :

$$\boxed{q_a = p\ q_{a+1} + q\ q_{a-1}}$$

b. Soit (x_n) une suite recurrente linéaire d'ordre 2 déterminée par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad p\ x_{n+1} - x_n + q\ x_{n-1} = 0$$

L'équation caractéristique :
(EC) $$r^2 - (1/p)r + q/p = 0$$

admet pour racines 1 et q/p car leur somme vaut $1+\frac{q}{p}=\frac{p+q}{p}=\frac{1}{p}$ et leur produit vaut $1\times\frac{q}{p}=\frac{q}{p}$.
Par conséquent, il existe un couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ de réels tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$x_n=\lambda+\mu\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

En particulier il existe un couple $(\lambda_0,\mu_0)\in\mathbb{R}^2$ de réels tels que pour tout $a\in[\![0,N]\!]$

$$\boxed{q_a=\lambda_0+\mu_0\left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

▲

c. Pour déterminer les valeurs de λ_0 et μ_0, je résous le système :

$$\left\{\begin{array}{l} q_0=\lambda_0+\mu_0 \\ q_N=\lambda_0+\mu_0(q/p)^N \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_0+\mu_0=1 \\ \lambda_0+\mu_0(q/p)^N=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mu_0=\frac{p^N}{p^N-q^N} \\ \lambda_0=-\frac{q^N}{p^N-q^N} \end{array}\right.$$

Par conséquent, pour tout $a\in[\![0,N]\!]$,

$$\boxed{q_a=-\frac{q^N}{p^N-q^N}+\frac{p^N}{p^N-q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

▲

2. Pour tout $a\in[\![0,N]\!]$, on note P_a l'événement "*la particule, initialement située au point d'abscisse a, s'arrête en N*", et p_a la probabilité de P_a. De la même manière que précédemment, la formule des probabilités totales pour le sytème complet d'événements (G_1,D_1), montre que p_a vérifie la relation de récurrence

$$\boxed{p_a=p\ p_{a+1}+q\ p_{a-1}}$$

Comme toute suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad p\ x_{n+1}-x_n+q\ x_{n-1}=0$$

s'écrit sous la forme

$$x_n=\lambda+\mu\left(\frac{q}{p}\right)^n,$$

il existe un couple (λ_0,μ_0) de nombres réels tels que pour tout $a\in[\![0,N]\!]$

$$p_a=\lambda_0+\mu_0\left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

Pour déterminer λ_0 et μ_0, on remarque que $p_0=0$ et $p_N=1$, de sorte que λ_0 et μ_0 sont solutions du sytème d'équations linéaires :

$$\left\{\begin{array}{l} p_0=\lambda_0+\mu_0 \\ p_N=\lambda_0+\mu_0(q/p)^N \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_0+\mu_0=0 \\ \lambda_0+\mu_0(q/p)^N=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_0=\frac{p^N}{p^N-q^N} \\ \mu_0=-\frac{p^N}{p^N-q^N} \end{array}\right.$$

Par conséquent, pour tout $a\in[\![0,N]\!]$,

$$\boxed{p_a=\frac{p^N}{p^N-q^N}-\frac{p^N}{p^N-q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

▲

3. Soit S_a l'événement "*le processus initié en a s'arrête*". On peut remarquer que A est la réunion disjointe des événements Q_a et P_a. D'après la propriété d'additivité des probabilités, nous obtenons pour tout $a\in[\![0,N]\!]$:

$$p(S_a)=p_a+q_a=\frac{p^N-q^N}{p^N-q^N}=1.$$

Par conséquent le processus s'arrête **presque sûrement**. ▲

EXERCICE 2 : ETUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE

Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ f(x) = \dfrac{x+2}{x}$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 \in \mathbb{R}^{+\star} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Remarque : L'énoncé précise ici que l'intervalle de définition de f est stable par f. Par conséquent, la suite u est bien définie. En général, c'est à vous qu'il revient de vérifier la stabilité de l'intervalle de définition de la fonction *itératrice*.

1. Soit $x > 0$, remarquons que $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. Il en résulte que f est strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$ sur $]1, +\infty[$. ▲
2. Etudions la positivité de $f - Id$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+\star}$

$$\begin{aligned} f(x) - x > 0 \quad &\iff \quad \frac{x+2}{x} - x > 0 \\ &\iff \quad x^2 - x - 2 < 0 \\ &\iff \quad (x+1)(x-2) < 0. \end{aligned}$$

Remarque : -1 et 2 sont racines évidentes.

On dresse alors un premier tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f - Id$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2 | 2	$\searrow$	1

En particulier, le seul point fixe de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est 2. La fonction $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ étant *continue*, il s'agit du seul *candidat-limite* possible : si u est convergente, alors la limite est nécessairement 2. ▲

Remarque : La fonction est décroissante sur $]0, +\infty[$. Par conséquent -sauf si $u_0 = 2$- la suite u est **non monotone**. En revanche, les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones car $f \circ f$ est croissante sur l'intervalle. L'étude de ces suites est l'objet de la question suivante.

3. La suite extraite (u_{2n}) est définie par la donnée du premier terme u_0 ainsi que par la relaion de récurrence : $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$. De même, la suite u_{2n+1} est définie par la donnée de son premier terme u_1 et par la relation de récurrence $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$.
L'étude de ces suites passe donc par l'étude de la fonction $f \circ f$:
Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$, la fonction $f \circ f$ est croissante. Etudions la positivité de $f \circ f - Id$:
Soit $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x > 0 \quad &\iff \quad 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} - x > 0 \\ &\iff \quad 1 + \frac{2x}{x+2} - x > 0 \\ &\iff \quad -x^2 + x + 2 > 0 \\ &\iff \quad f(x) - x > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f \circ f - Id$ et $f - Id$ sont simultanément positives. En particulier, $f \circ f$ n'a pas d'autres points fixes que 2 sur l'intervalle considéré. Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans un tableau :

x	0		2		$+\infty$
$f - Id$		$+$	0	$-$	
$f \circ f - Id$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2 \parallel 2$	$\searrow$	1
$f \circ f$	1	$\nearrow$	$2 \parallel 2$	$\nearrow$	3

A présent, il ne reste plus qu'à *commenter* ce tableau, en discutant suivant la valeur de u_0.

- Si $u_0 = 2$, la suite u_n est constante égale à 2. Par conséquent, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) aussi. En particulier, elles sont adjacentes.
- Si $u_0 \in]0,2[$.
  - **Comportement asymptotique de la suite** (u_{2n})
    L'intervalle $]0,2[$ étant **stable** par $f \circ f$ (cf tableau) la suite (u_{2n}) est à valeurs dans $]0,2[$. Comme **la fonction** $f \circ f$ **est croissante** sur cet intervalle, **la suite** (u_{2n}) **est monotone**. Pour connaître son sens de variation, examinons les deux premiers termes de cette suite :

    $$u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 > 0$$

    car pour tout $x \in]0,2[$, $f \circ f(x) - x > 0$ (cf tableau). Par conséquent **la suite** (u_{2n}) **est croissante**. Comme elle est à valeurs dans $]0,2[$, cette suite **monotone est bornée**. Elle est donc **convergente**. Comme $f \circ f$ est *continue*, elle converge vers un **point fixe** de $f \circ f$. Mais le seul point fixe de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}^+$ est 2. Par conséquent **la suite** (u_{2n}) **est convergente de limite 2**.
  - **Comportement asymptotique de la suite** (u_{2n+1})
    La fonction f envoie[1] l'intervalle $]0,2[$ dans l'intervalle $]2,+\infty[$. Comme $u_0 \in]0,2[$, il s'en suit que $u_1 = f(u_0)$ appartient à l'intervalle $]2,+\infty[$. De plus, toujours d'après le tableau, l'intervalle $]2,+\infty[$ est **stable** par $f \circ f$. Par conséquent la suite (u_{2n+1}) est à valeurs dans $]2,+\infty[$. Comme **la fonction** $f \circ f$ **est croissante** sur cet intervalle, **la suite** (u_{2n+1}) **est monotone**. Pour connaître son sens de variation, examinons les deux premiers termes de cette suite :

    $$u_3 - u_1 = f \circ f(u_1) - u_1 < 0$$

    car pour tout $x \in]2,+\infty[$, $f \circ f(x) - x < 0$ (cf tableau). Par conséquent **la suite** (u_{2n+1}) **est décroissante**.
    Comme elle est à valeurs dans $]2,+\infty[$, cette suite est **décroissante et minorée**. Elle est donc **convergente**. Comme $f \circ f$ est *continue*, elle converge nécessairement vers un **point fixe** de $f \circ f$. Mais le seul point fixe de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}^+$ est 2. Par conséquent **la suite** (u_{2n+1}) **est convergente de limite 2**.

  Ainsi, lorsque $u_0 \in]0,2[$, nous avons démontré que **la suite** (u_{2n}) **est croissante** et convergente de limite 2, tandis que **la suite** (u_{2n+1}) **est décroissante** et convergente de limite 2. D'après les propriétés algébriques des suites convergentes, il s'en suit que **la suite** $(u_{2n+1} - u_{2n})$ **est convergente de limite** $0 = 2 - 2$.
  Par définition, cela signifie que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, de llimite commune 2. ▲
- Si $u_0 \in]2,+\infty[$ ou *l'art du copier-coller !*
  - **Comportement asymptotique de la suite** (u_{2n})
    D'après l'étude précédente, la suite des itérés de u_0 par l'application $f \circ f$ est à valeurs dans l'intervalle $]2,+\infty[$, décroissante et convergente de limite 2.
  - **Comportement asymptotique de la suite** (u_{2n+1})
    Comme f envoie l'intervalle $]2,+\infty[$ dans l'intervalle $]0,2[$, $u_1 = f(u_0)$ appartient en ce cas à l'intervalle $]0,2[$. L'étude précédente montre en ce cas que la suite des itérés de u_1 par l'application $f \circ f$ est croissante et convergente vers 2. C'est-à-dire que la suite (u_{2n+1}) est croissante et convergente de limite 2.

[1] cf tableau

Lorsque $u_0 \in]2, +\infty[$, la suite (u_{2n}) est décroissante et convergente de limite 2 tandis que la suite (u_{2n+1}) est croissante et convergente de limite 2. En conséquence, ces suites sont adjacentes et convergent toutes deux vers 2.

Dans tous les cas, nous avons démontré que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et convergent toutes deux vers 2. ▲

4. D'après la question précédente les suites extraites de u formées des termes de rangs pairs et impairs sont convergente vers la même limite 2. Par conséquent la suite u elle-même est convergente de limite 2. ▲

Exercice 3 : Polynômes

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, on s'intéresse aux polynômes

$$Q_n = (X+1)^n - X^n - 1$$

1. **a.** Les polynômes $(X+1)^n$ et X^n+1 sont tous deux de degré n. De plus, comme ces deux polynômes ont pour monômes dominants X^n, le polynôme Q_n est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Le coefficient du terme de degré $n-1$ est $n \in \mathbb{N}^\star$. Par conséquent, Q_n est de degré exactement $n-1$ et son monôme dominant est nX^{n-1}. ▲

   b. D'après la formule du binôme de Newton

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - X^n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} X^k.$$

▲

D'après les questions précédentes, Q_n est de degré $n-1 > 0$, en particulier le polynômeQ_n est non nul. De plus les coefficients de Q_n sont les $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. En particulier, les coefficients de Q_n sont des entiers naturels. ▲

   c. D'après la caractérisation des racines, X divise Q_n si et seulement si 0 est racine de Q_n.
   Or $\tilde{Q}_n(0) = (0+1)^n - 0^n - 1 = 0$. Par suite, X divise Q_n. ▲

   d. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, alors d'après la caractérisation des racines

$$\begin{aligned} (X+1)|Q_n \quad &\Longleftrightarrow \quad -1 \text{ est racine de } Q_n \\ &\Longleftrightarrow \quad \tilde{Q}_n(-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (-1)^n = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad n \text{ est impair .} \end{aligned}$$

   Par conséquent $\qquad X+1$ divise Q_n *si et seulement si* n est impair. ▲

   e. D'après la caractérisation des racines multiples, Q_n est divisible par $(X+1)^2$ si -1 est racine d'ordre de multiplicité supérieure ou égale à 2.
   Comme $Q_n' = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}$, j'en déduis que $Q_n'(-1) = -n(-1)^{n-1} \neq 0$. Par conséquent, -1 est racine simple de Q_n et donc $(X+1)^2$ ne divise pas Q_n. ▲

2. **a.** j est une racine cubique de l'unité, différente de 1, par conséquent j est racine du polynôme à coefficients entiers X^2+X+1.

   b. D'après la question précédente, $j^2+j+1=0$, c'est-à-dire $j+1=-j^2$. Par conséquent :

$$Q_n(j) = (j+1)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1.$$

▲

   c. Montrons que $Q_n(j)$ est nul *si et seulement si* il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n = 6k-1$ ou $n = 6k+1$.
   D'après la question précédente,

$$j \text{ est racine de } Q_n \quad \textit{si et seulement si} \quad (-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = 0$$

   Discutons suivant le reste de la division euclidienne de n par 6 :

   - supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$.

$$(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = j^{12k} - j^{6k} - 1 = 1 - 1 - 1 \neq 0$$

- supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k + 1$.

$$(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = -j^{12k+2} - j^{6k+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

- supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k + 2$.

$$(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = j^{12k+4} - j^{6k+2} - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$$

- supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k + 3$.

$$(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = -j^{12k+6} - j^{6k+3} - 1 = -1 - 1 - 1 \neq 0$$

- supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k + 4$.

$$(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = j^{12k+8} - j^{6k+4} - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$$

- supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k + 5$.

$$(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = -j^{12k+10} - j^{6k+5} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$$

En conclusion,

$$\begin{array}{lll} j \text{ est racine de } Q_n & \textit{si et seulement si} & \text{le reste dans la division euclidienne de } n \text{ par 6 vaut 1 ou 5} \\ & \textit{si et seulement si} & \text{il existe } k \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } n = 6k+1 \text{ ou } n = 6k-1. \end{array}$$

▲

d. Pour que j soit racine double[2] de Q_n il faut et il suffit que j soit racine de Q_n et de Q'_n.
Or $Q'_n = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}$, d'où $Q'_n(j) = n(-1)^{n-1} j^{2n-2} - nj^{n-1}$.

Par conséquent $\quad Q'_n(j) = 0$ *si et seulement si* $(-1)^{n-1} j^{2n-2} - j^{n-1} = 0$

- supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n = 6k + 1$.

$$(-1)^{n-1} j^{2n-2} - j^{n-1} = j^{12k+2-2} - j^{6k+1-1} = 1 - 1 = 0$$

- supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n = 6k - 1$.

$$(-1)^{n-1} j^{2n-2} - j^{n-1} = j^{12k-2-2} - j^{6k-1-1} = j^2 - j \neq 0$$

Par conséquent, j est racine double s'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n = 6k + 1$. ▲

e. • **Factorisons Q_5**
D'après ce qui précède, 0, -1, j et $\bar{j}$ sont racines de Q_5. Par conséquent $X(X+1)(X-j)(X-\bar{j}) = X(X+1)(X^2+X+1)$ divise Q_5. Comme Q_5 est de monôme dominant $5X^4$, j'obtiens :

$$Q_5 = 5\ X(X+1)(X-j)(X-\bar{j}) = 5\ X(X+1)(X^2+X+1)$$

• **Factorisons Q_7**
D'après ce qui précède, 0, -1, j et $\bar{j}$ sont racines de Q_5. De plus j et $\bar{j}$ sont racines doubles de Q_7. Par conséquent $X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2 = X(X+1)(X^2+X+1)^2$ divise Q_7. Comme Q_7 est de monôme dominant $7X^6$, j'obtiens :

$$Q_7 = 7\ X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2 = 7\ X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

▲

[2] c'est-à-dire de multiplicité supérieure ou égale à 2