Corrigé du Devoir Surveillé n° 6

Exercice 1 : Etude d'une suite définie implicitement

Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction numérique définie par :

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{t^2+1}$$

1. Etude de la fonction f

a. Soit $t > 0$, $f(t) = \ln(1+t) + 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction logarithme est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, la fonction $t \mapsto 1+t^2$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+\star}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$. Par les propriétés algébriques des fonctions continues ainsi que des fonctions monotones, il en résulte que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. ▲

b. Posons $J = f(\mathbb{R}^{+\star}$. f étant continue et strictement croissante, elle réalise d'après le **Théorème de la bijection**, une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ sur J. De plus f étant strictement croissante, $J =]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]0, +\infty[$. ▲

c. Soit $g : J \to \mathbb{R}^{+\star}$ l'application réciproque de f. D'après le **Théorème de la bijection**, g est une bijection continue et strictement croissante de de $\mathbb{R}^{+\star}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. D'où $g(]0,+\infty[) =]\inf g, \sup g[=]\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$.
Comme $g(]0,+\infty[=]0,+\infty[$, il s'en suit que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

▲

d. Soit $t > 0$, alors $\dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{\ln(1+t}{t} + \dfrac{t}{t^2+1}$.
Chacune des deux fractions donne une forme indéterminée au voisinage de $+\infty$. J'utilise des équivalents pour me ramener aux fonctions usuelles, puis j'utilise le théorème de comparaison des fonctions usuelles :

- $\dfrac{\ln(1+t}{t} \sim_{+\infty} \dfrac{\ln t}{t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$
- $\dfrac{t}{t^2+1} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

D'où

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$$

Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f présente au voisinage de $+\infty$. une branche parabolique de direction asymptotique (Ox). ▲

e. Pour tracer la courbe représentative de f je remarque que *grosso-modo*, la fonction f est proche de celle de $t \mapsto \ln(1+t)$. Pour tracer la courbe de g, je complète par symétrie par rapport à la diagonale. ▲

2. Etude d'une suite définie implicitement
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. On considère l'équation

$$(1) \qquad f(t) = \frac{1}{n}$$

a. Comme $1/n \in \mathbb{R}^{+\star}$ appartient à l'ensemble des images de l'application bijective $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$, il possède un unique antécédent α_n dans $\mathbb{R}^{+\star}$. ▲

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, α_n est l'unique antécédent de $1/n$ par f. Autrement dit, avec les notations ci-dessus : $\alpha_n = g(1/n)$. Or la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et convergente de limite nulle. Comme g est croissante, il s'en suit que (α_n) a la même monotonie que $(1/n)$: elle est donc décroissante. D'autre part, d'après le Théorème de la caractérisation séquentielle de la limite nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \\ \bullet \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(1/n) = 0$$

Par conséquent la suite (α_n) est décroissante de linite nulle. ▲

c. Soit $t > 0$, alors $\dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{\ln(1+t}{t} + \dfrac{t}{t^2+1}$.

Comme $\ln(1+t) \sim_0 t$, il en résulte que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t}{t} = 1$. D'autre part, il est clair que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{t^2+1} = 0$. D'où, par opérations algébriques sur les fonctions possèdant une limite, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 1$. D'après le Théorème de la caractérisation séquentielle de la limite nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(\alpha_n)}{\alpha_n} = 1$. Comme $f(\alpha_n) = 1/n$, nous en concluons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$, puis que

$$\alpha_n \sim \frac{1}{n}$$

▲

Exercice 2 : Approximations par dichotomie

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **strictement décroissante** sur $[a,b]$ telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

1. Comme f est continue sur $I = [a,b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, il résulte du TvI qu'il existe (au moins un) $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$. Comme de plus par hypothèse f est strictement monotone, elle est en particulier injective sur $]a,b[$. Par conséquent c est l'unique antécédent de 0 par f. ▲

2. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$; on teste $f(x_n)$:
– si $f(x_n) \geq 0$, on pose alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$
– si $f(x_n) < 0$, on pose alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$

a. Par construction des suites (a_n) et (b_n), il est clair que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \geq 0$ et $f(b_n) < 0$. Comme par construction $0 = f(c)$, j'en déduis pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement :

$$f(b_n) \leq f(c) \leq f(a_n)$$

Comme f est (strictement) décroissante, il s'en suit[1] que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq c \leq b_n$$

Une récurrence immédiate moàntre que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. En effet :

Initialisation : Lorsque $n = 0$ c'est archi triv

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Par construction des suites (a_n) et (b_n) deux cas se présentent :

either $f(x_n) \geq 0$: dans ce cas $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$, de sorte que $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - x_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$

or $f(x_n) < 0$: dans ce cas $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$, de sorte que $b_{n+1} - a_{n+1} = x_n - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

Dans tous les cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$. Comme par hypothèse de récurrence $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, il s'en suit que $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. ▲

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question **2.a**, $c \in [a_n, b_n]$. Comme x_n désigne le milieu de ce segment, la distance entre x_n et c est majorée par la moitié de la longueur de ce segment. En utlisant le résultatde la question précédente, j'en déduis :

$$|x_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

[1]raisonnez par l'absurde si vous n'êtes pas convaincu ...

c. Soit $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif. Pour que x_n constitue une valeur approchée de c à ε près, il suffit que $|x_n - c| < \varepsilon$. D'après la question précédente, il suffit donc que $\dfrac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$. Or

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \quad &\iff \quad 2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \\ &\iff \quad n+1 \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Soit N la partie entière de $\dfrac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$. Pour que x_n constitue une valeur approchée de c à ε près, il suffit que n soit supérieur à N. ▲

Problème 1 : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + u_n^2 \\ u_0 &= a, \quad a \in \mathbb{R}^{+\star} \end{cases}$$

1. **Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

a. Une récurrence immédiate montre que (u_n) est strictement positive : en effet
Initialisation : $a > 0$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \geq u_n > 0$. Par transitivité de l'ordre, il s'en suit que $u_{n+1} > 0$.
Conclusion : Par récurrence, j'ai démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Il en résulte immédiatement que u_n est strictement croissante :
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après ce qui précède $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$. J'en déduis que (u_n) est strictement croissante.
▲

b. Recall that increasing sequences are either converging to a finite value or diverging to $+\infty$. Montrons que (u_n) ne peut être convergente :
Supposons au contraire que (u_n) *converge* vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & u_n + u_n^2 \\ \swarrow & & \searrow \\ \ell & = & \ell + \ell^2 \end{array}$$

D'après les propriétés algébriques des suites convergentes [2], la suite $u_n + u_n^2$ est convergente de limite ℓ. De même, la suite u_{n+1} extraite de la suite u_n est aussi convergente vers ℓ. Par unicité de la limite, il en résulte que $\ell = \ell + \ell^2$, i.e. $\ell = 0$. Or la suite (u_n) est croissante donc minorée par $a > 0$: elle ne peut converger vers 0. *Contradiction*

▲

2. **Etude d'une suite auxiliaire**

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{2^n}\ \ln u_n$$

Comme la suite (u_n) est strictement positive, la suite auxiliaire v est bien définie.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ \ln u_{n+1} - \frac{1}{2^n}\ \ln u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ \ln(u_n + u_n^2) - \frac{1}{2^n}\ \ln u_n \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\ln(u_n + u_n^2) - 2\ \ln u_n\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\ln(u_n + u_n^2) -\ \ln u_n^2\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right). \end{aligned}$$

[2] ou par le théorème de la Caractérisation séquentielle de la continuité appliqué à la fonction continue $x \mapsto x + x^2$, ou bien encore par le théorème sur les limites des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction *itératrice* f continue sur un intervalle stable

Soient p et n des entiers naturels quelconques, en appliquant ce qui précède aux deux termes consécutifs v_{n+p+1} et v_{n+p} de la suite v, j'obtiens directement

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\big(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\big)$$

Or d'après la question **1 a.** la suite (u_n) est strictement croissante, par conséquent la suite $\ln \frac{1}{u_n}$ est strictement décroissante. Comme 2^{n+p+1} est positif, j'en déduis que :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big)$$

▲

b. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, Ecrivons

$$v_{n+k+1} - v_n = \sum_{j=0}^{k} v_{n+1+j} - v_{n+j}$$

Or pour tout $j \in [\![0,k]\!]$ nous avons d'après la question précédente

$$0 < v_{n+1+j} - v_{n+j} \leq \frac{1}{2^{n+1+j}} \ \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big)$$

Sommant terme à terme cet encadrement conduit à

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \quad \leq \quad \sum_{j=0}^{k} \ \frac{1}{2^{n+1+j}} \ \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big) \sum_{j=0}^{k} \ \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

Or, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \ (1/2)^j = 2 \ \left(1 - (1/2)^{k+1}\right) \leq 2$. Par conséquent,

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big)$$

▲

c. Choisissons $n = 0$, il vient :$\forall k \in \mathbb{N}$, $0 < v_{k+1} - \ln a \leq \ln\big(1 + \frac{1}{a}\big)$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul k :

$$\ln a < v_k \leq \ln a + \ln\big(1 + \frac{1}{a}\big)$$

Il en résulte immédiatement que la suite v est bornée.
Choisissons $k = 0$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$. D'où je tire que v est strictement croissante.
La suite v étant croissante et majorée est donc convergente. On note $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. ▲

3. **Comportement asymptotique de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a. Comme v est croissante et convergente de limite α, il en résulte que $\alpha = \sup_n v_n$. En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \alpha$. Comme

$$\frac{1}{2^n} \ln u_n \leq \alpha \iff \ln u_n \leq 2^n\alpha \iff u_n \leq \exp(\alpha 2^n),$$

j'endéduis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, nous avons démontré que :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big)$$

Or la suite (v_{n+k+1}) étant extraite de v converge quand k tend vers $+\infty$ vers α. Ainsi, par compatibilité du passage à la limite dans une inégalité, j'obtiens l'encadrement : $0 \leq \alpha - v_n \leq \dfrac{1}{2^n} \ \ln\big(1 + \dfrac{1}{u_n}\big)$, c'est-à-dire

$$2^n\alpha - 2^n v_n \leq \ln\big(1 + \frac{1}{u_n}\big)$$

Comme la fonction exp est (strictement) croissante, et que $u_n = \exp(2^n v_n)$, j'en déduis que

$$\exp(2^n\alpha) \leq 1 + u_n$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, u_n vérifie l'encadrement :

$$e^{2^n\alpha} - 1 \leq u_n \leq e^{2^n\alpha}$$

D'où je tire, en divvisant tous les membres de cet encadrement par $\exp(2^n\alpha)$,

$$1 - e^{-2^n\alpha} \leq \frac{u_n}{e^{2^n\alpha}} \leq 1$$

On conclut alors, grâce au théorème de convergence par encadrement que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{e^{2^n\alpha}} = 1$. Autrement dit

$$u_n \sim_{+\infty} \exp(\alpha 2^n)$$

▲

b. On pose

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$$

D'après la question précédente, l'encadrement suivant est valide pout tout entier naturel n

$$e^{2^n\alpha} - 1 \leq u_n \leq e^{2^n\alpha}$$

Il en résulte *at once* que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \beta_n \leq 1$$

De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}
(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \times e^{-\alpha 2^n} &= \left[e^{\alpha\times 2\times 2^n} - u_n^2 - u_n + e^{\alpha 2\times 2^n} - 2u_n e^{\alpha 2^n} + u_n^2 - e^{\alpha 2^n} + u_n\right] \times e^{-\alpha 2^n} \\
&= \left[2e^{\alpha\times 2\times 2^n} - 2u_n e^{\alpha 2^n} - e^{\alpha 2^n}\right] \times e^{-\alpha 2^n} \\
&= \left[2e^{\alpha\times 2^n} - 2u_n - 1\right] \\
&= 2\beta_n - 1
\end{aligned}$$

▲

c. Montrons que la suite (β_n) est convergente. Remarquons tout d'abord que la suite $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)_n$ est bornée car, d'après la question **3.b.** $(\beta_n)_n$ l'est. Soit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ |\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| \leq M$.
Ainsi

$$|2\beta_n - 1| = \left|\frac{\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n}{e^{\alpha 2^n}}\right| \leq \frac{M}{e^{\alpha 2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème de convergence par comparaison, la suite $(2\beta_n - 1)$ est convergente de limite nulle, c'est-à-dire (β_n) est convergente de limite $1/2$. Ainsi pouvons nous écrire $\beta_n \sim 1/2$, ou bien encore $\beta_n = 1/2 + o_{+\infty}(1)$. Substituons cette ewpression dans la définition de β_n, nous obtenons finalement :

$$u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o_{+\infty}(1)$$

▲

Problème 2 : Suite doublement récurrente non linéaire

Partie I. Préliminaire : suites vérifiant une relation de récurrence linéaire

Etant donné un paramètre réel $\alpha > 0$ strictement positif, on note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$

1. Soit $u \in \mathscr{E}$.

a. u est une suite doublement récurrente linéaire. Formons l'**équation caractéristique**

$$(EC) \qquad r^2 - \alpha r - \alpha = 0$$

Le discriminant de (EC) est $\Delta = \alpha^2 + 4\alpha$. Δ est strictement positif car α l'est. Par suite (EC) possède deux racines distinctes :

$$r = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2}$$

Je sais qu'en ce cas, il existe des nombres réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = ar^n + bs^n$$

▲

b. Pour déterminer a et b en fonction de u_0 et u_1, je procède de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & a+b \\ u_1 & = & ar+bs \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & u_0 \\ ar+bs & = & u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & u_0 \\ b(s-r) & = & u_1 - ru_0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{su_0 - u_1}{s-r} \\ b & = & \dfrac{u_1 - ru_0}{s-r} \end{array}\right.$$

▲

c. $$|r| = \frac{\sqrt{\alpha^2+4\alpha} - \alpha}{2} < \frac{\sqrt{\alpha^2+4\alpha} + \alpha}{2} = |s|.$$ ▲

2. On suppose dans cette question que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Montrons que $|s| < 1$.
Remarquons que

$$|s| < 1 \iff \sqrt{\alpha^2+4\alpha} + \alpha < 2 \iff sqrt\alpha^2 + 4\alpha < 2 - 4\alpha$$

Comme par hypothèse $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $2 - 4\alpha$ est positif, ainsi

$$|s| < 1 \iff \alpha^2 + 4\alpha < (2-4\alpha)^2 \iff 4\alpha < 4 - 4\alpha \iff 8\alpha < 4.$$

Cette dernière inégalité étant trivialement vraie, j'en déduis que $|s| < 1$.

Soit $u \in \mathscr{E}$. D'après la question **1.a** et le calcul ci-dessus, u est la somme de deux suites géométriques de raisons r et s qui vérifient $0 \leq |r| \leq |s| < 1$. D'après le théorème de convergence des suites géométriques, il en résulte que u est convergente de limite nulle. ▲

Partie II. Etude d'une récurrence non linéaire

Soit $\beta > 0$ un nombre réel strictement positif. On note $m = \min\{1, \beta\}$ le plus petit des nombres 1 et β et $M = \max\{1, \beta\}$ le plus grand de ces deux nombres.

On considère la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = \beta$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$$

1. Montrons par **récurrence double** que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ strictement positif,

$$m \leq v_n \leq 4\ M$$

Initialisation : je vérifie pour $n = 1$ **et** $n = 2$
Pour $n = 1$, $v_1 = \beta$. Par construction de m et M, on vérifie immédiatement que $m \leq \beta \leq M \leq 4M$
Pour $n = 2$, $v_2 = \sqrt{\beta}$. Comme $m \leq 1$, je déduis des propriétés de la fonction racine carrée que $\sqrt{\beta} \geq \sqrt{m} \geq m$.
D'autre part, comme $M \geq 1$, je déduis des propriétés de la racine carrée que $\sqrt{\beta} \leq \sqrt{M} \leq M \leq 4M$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $m \leq v_n \leq 4\ M$ **et** $m \leq v_{n+1} \leq 4\ M$. (Lorsque $n = 1$, je retrouve bien les propriétés *initialisées*)
Montrons que $m \leq v_{n+2} \leq 4M$
Comme $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$, j'en déduis immédiatement que $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$. Or par HR $v_n \geq m$. Je déduis finalement du fait que $m \leq 1$ que

$$v_{n+2} \geq \sqrt{v_n} \geq \sqrt{m} \geq m$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence, $v_n \leq 4M$ et $v_{n+1} \leq 4M$. Comme $M \geq 1$, j'en déduis que :

$$v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n} \leq \sqrt{4M} + \sqrt{4M} \leq 4\sqrt{M} \leq 4M$$

Conclusion : Par **récurrence double** sur $n \in \mathbb{N}^\star$ j'ai prouvé

$$m \leq v_n \leq 4\ M$$

▲

2. Supposons que v soit convergente, et notons $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Remarquons que par passage à la limite dans une inégalité, ℓ appartient nécessairement au segment $[m, 4M]$. En particulier $\ell > 0$. Montrons que $\ell = 4$.

$$\begin{array}{ccccc} v_{n+2} & = & \sqrt{v_{n+1}} & + & \sqrt{v_n} \\ \swarrow & & \downarrow & & \searrow \\ \ell & = & \sqrt{\ell} & + & \sqrt{\ell} \end{array}$$

Les suites (v_{n+2}) et (v_{n+1}) étant extraites de v elles convergent aussi vers ℓ. D'autre part, la fonction $\sqrt{\cdot}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, il résulte du TCSC que les suites $(\sqrt{v_n})$ et $(\sqrt{v_{n+1}})$ sont convergentes de limite $\sqrt{\ell}$. Ainsi, si la suite v converge sa limite ℓ vérifie nécessairement l'équation :

$$\ell = 2\sqrt{\ell}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$x = 2\sqrt{x} \iff x^2 = 4x \iff x(x-4) = 0$$

Comme $\ell > 0$, il s'en suit que nécessairement $\ell = 4$. ▲

On se propose de démontrer que pour tout β strictement positif, la suite v est effectivement convergente de limite 4.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel, alors en mulipliant par l'expression conjuguée, nous obtenons :

$$v_{n+2} - 4 = \sqrt{v_n} - 2 + \sqrt{v_{n+1}} - 2 = \frac{v_{n+1} - 4}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{v_n - 4}{\sqrt{v_n} + 2}$$

Prenons les valeurs absolues. Il découle immédiatement de l'inégalité triangulaire :

$$|v_{n+2} - 4| \leq \frac{|v_{n+1} - 4|}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{|v_n - 4|}{\sqrt{v_n} + 2}$$

▲

4. On pose $\alpha = \frac{1}{2+\sqrt{m}}$ et on considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = |v_1 - 4|$, $u_1 = |v_2 - 4|$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$

Montrons par **récurrence double** que pout tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ strictement positif

$$|v_n - 4| \leq u_{n-1}$$

Initialisation : Par construction de la suite u, nous avons $|v_1 - 4| \leq u_0$ **et** $|v_2 - 4| \leq u_1$.
Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$ **et** $|v_{n+1} - 4| \leq u_n$. Alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, j'obtiens tout d'abord :

$$\begin{aligned} |v_{n+2} - 4| &\leq \frac{|v_{n+1} - 4|}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{|v_n - 4|}{\sqrt{v_n} + 2} \\ &\leq \frac{u_n}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{v_n} + 2}. \end{aligned}$$

De plus, d'après la question **1.**, $v_n \geq m$ et $v_{n+1} \geq m$. D'où $\sqrt{v_{n+1}}+2 \geq \sqrt{m}+2 = \alpha^{-1}$ et $\sqrt{v_n}+2 \geq \sqrt{m}+2 = \alpha^{-1}$. Par compatibilité de l'ordre, j'en déduis finalement

$$|v_{n+2} - 4| \leq \alpha u_n + \alpha u_{n-1} = u_{n+1}$$

Conclusion : Ainsi, nous avons démontré par récurrence double que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$

$$|v_n - 4| \leq u_{n-1}$$

▲

5. Comme $\alpha \in]0, 1/2[$, la suite u définie ci-dessus est converegente de limite 0 d'après la question **2** de la **Partie I**. Ainsi la suite (u_{n-1}) étant extraite de u est convergente de limite 0. Par le théorème de convergence par comparaison, l'inégalité ci-dessus entraîne que la suite v converge vers 4. ▲