Corrigé du Devoir Surveillé n° 7

Exercice 1 : Série harmonique incomplète

Série harmonique

On considère la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $T_{2n} - T_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$. ▲

2. Montrons par l'absurde que la série diverge. Supposons au contraire qu'elle soit convergente de somme σ. En ce cas, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, j'obtiens $0 \geq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Par suite la série diverge. Comme cette série est à temes positifs, elle diverge vers $+\infty$. ▲

Série harmonique incomplète

On considère désormais la série dont le terme général u_n est défini par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_n &= 0 \quad \text{si le chiffre 5 apparaît dans l'écriture décimale de } n \\ u_n &= \dfrac{1}{n} \quad \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

3. Dénombrement

a. Les entiers compris entre 1 et 9 s'écrivant sans le chiffre 5 sont 1,2,3,4,6,7,8 et 9. Il y en a donc 8

b. Un entier compris entre 10 et 99 s'écrivant sans le chiffre 5 est de la forme $n = a\,10 + b$, où a est un entier compris entre 1 et 9 s'écrivant sans le chiffre 5 et b est un entier compris entre 0 et 9 s'écrivant sans le chiffre 5.

- Choix de a $\rightsquigarrow$ 8 possibilités
- Choix de b $\rightsquigarrow$ 9 possibilités

Il y a donc 72 nombres compris entre 10 et 99 s'écrivant sans le chiffre 5. ▲

c. Tout nombre enier compris entre 10^p et $10^{p+1} - 1$ peut se mettre sous la forme

$$n = a_p \cdots a_1 a_0$$

où les a_k sont des chiffres compris entre $[\![0, 9]\!]$ sauf a_p qui ne peut être nul.
Nous pouvons alors dénombrer le nombre d'entiers compris entre 10^p et $10^{p+1} - 1$ s'écrivant sans le chiffre 5 de la façon suivante :

- Choix de a_p $\rightsquigarrow$ 8 possibilités
- Choix de a_{p-1} $\rightsquigarrow$ 9 possibilités

  $\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$.

- Choix de a_0 $\rightsquigarrow$ 9 possibilités

Au total il y a donc 8×9^p entiers compris entre 10^p et $10^{p+1} - 1$ s'écrivant sans le chiffre 5. ▲

4. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ $S_{10^{p+1}-1} - S_{10^p-1} = \sum_{k=10^p}^{10^{p+1}-1} u_k$. Dans cette somme les termes sont les inverses des entiers compris entre 10^p et $10^{p+1}-1$ qui s'écrivent sans le chiffre 5. D'après la question précédente, il y a donc 8×9^p termes non nuls dans cette somme. Le plus grand d'entre eux est(inverse du plus petit...) $\dfrac{1}{10^p}$. Par suite

$$S_{10^{p+1}-1} - S_{10^p-1} \ < \ 8 \ \left(\frac{9}{10}\right)^p$$

▲

5. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ un *télescopage* montre que $\sum_{\ell=2}^{p} \left(S_{10^\ell-1} - S_{10^{\ell-1}-1}\right) = S_{10^p-1} - S_9$. Il en résulte d'après la question précédente que

$$\begin{aligned}
S_{10^p-1} &= \sum_{\ell=2}^{p} \left(S_{10^\ell-1} - S_{10^{\ell-1}-1}\right) + S_9 \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{p-1} \left(S_{10^{\ell+1}-1} - S_{10^\ell-1}\right) + 8 \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{p-1} 8\ (9/10)^\ell + 8 \\
&\leq 8 \times \sum_{\ell=0}^{p-1} (9/10)^\ell = 8 \times \frac{1}{1-(9/10)} \\
&\leq 80.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\left(S_{10^p-1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée par 80. ▲

6. Comme les u_k sont positifs ou nuls, la suite (S_n) est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 10^n - 1$. Par croissance de S_n, il en résulte que $S_n \leq S_{10^n-1} \leq 80$. La suite (S_n) étant croissante et majorée, elle converge. Autrement dit, $\sum n \geq 0 u_n$ converge et sa somme est inférieure à 80. ▲

Moralité : La série harmonique est assez proche d'être convergente puisqu'il suffit de lui retirer *quelques* termes pour la faire converger.

Exercice 2 : Nombre de garçons d'une famille

Soit p un nombre réel tel que $0 < p < \frac{2}{3}$.

Dans un pays, on admet que la probabilité qu'une famille ait n enfants pour $n \in \mathbb{N}^\star$ est

$$p_n = \frac{1}{2} p^n$$

De plus à chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est $\frac{1}{2}$.

On considère une famille de ce pays et on note pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:
- E_n l'événement "*la famille compte n enfants*"
- G_n l'événement "*la famille a n garçons*"

1. Notons E l'événement "*la famille a au moins un enfant*". Nous pouvons discuter suivant le nombre exact d'enfants de la famille, il vient :

$$E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$$

Les événements E_n étant deux à deux incompatibles, il résulte de la σ-additivité des probabilités que

$$p(E) = p\big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(E_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} p^n = \frac{1}{2}\ \frac{p}{1-p}.$$

D'où $q = \dfrac{p}{2(1-p)}$.

Comme $0 < p < 2/3$, on vérifie aisément que $q \in]0,1[$. Il en découle que $q_0 = p(\bar{E}) = 1 - q = \dfrac{2-3p}{2(1-p)}$. ▲

Remarque : Dans cette première question, un résultat possible est un nombre entier naturel (le nombre d'enfants). On peut modéliser l'expérience aléatoire décrite par $\Omega = \mathbb{N}$. Ω étant dénombrable, on l'équipe de la tribu $\mathring{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Clairement $\mathring{A}$ est engendrée par les singletons $\{n\}$.

Une probabilité sur Ω est en ce cas la donnée d'une suite (p_n) de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Dans cet exercice $p_n = \frac{1}{2}p^n$ pour $n \geq 1$. La condition $0 < p < 2/3$ permet d'assurer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n < 1$. De sorte qu'en posant $p_0 = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit bien une probabilité sur Ω. □

2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n \geq k$. On suppose que la famille a n enfants. L'ensemble des résultats possibles est une n-liste d'élements de $\{F, G\}$ avec des notations évidentes. Autrement dit $\Omega = \{F, G\}^n$.
D'autre part, comme à chacune des n naissances, il y a équiprobabilité qu'il s'agisse d'une fille ou d'un garçon, Ω est muni de la probabilité uniforme :

$$\mathsf{Card}\ \Omega = 2^n$$

Notons $\tilde{G}_k \in \mathscr{P}(\Omega)$ l'événement "*la famille a k enfants*". Pour dénombrer $\tilde{G}_k$ je discute suivant l'ordre de naissance des enfants

- je choisis les rangs des k garçons parmi les n possibles $\rightsquigarrow$ $\binom{n}{k}$ possibilités,
- je choisis les rangs pour les filles $\rightsquigarrow$ $\binom{n-k}{n-k}$ possibilités.

Par suite $\mathsf{Card}\ \tilde{G}_k = \binom{n}{k}$. Par conséquent

$$p(\tilde{G}_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

Autrement dit, $p(G_k \mid E_n) = 2^{-n}\dbinom{n}{k}$. ▲

3. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Pour calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons, j'utilise la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient :

$$p(G_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(E_n) \times p(G_k \mid E_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} p(E_n) \times p(G_k \mid E_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^n$$

Or la série géométrique dérivée k fois de raison $p/2$ est convergente et

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{\big(1-(p/2)\big)^{k+1}}$$

Il en résulte que
$$p(G_k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{p}{2}\right)^k \frac{1}{\big(1-(p/2)\big)^{k+1}} = \frac{p^k}{(2-p)^{k+1}}.$$ ▲

4. Notons G l'événement "*la famille a au moins un garçon*". En discutant suivant le nombre exact de garçon dans la famille, il est clair que

$$G = \bigcup_{k\geq 1} G_k$$

Les G_k étant deux à deux incompatibles, il vient par σ-additivité :

$$p(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(G_k) = \frac{1}{2-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\big(p/2-p\big)^k = \frac{p}{2(2-p)(1-p)} = \frac{p}{4-6p+2p^2}$$

Passons à l'événement contraire, il vient $p(\bar{G}) = 1 - p(G) = \dfrac{2p^2-7p+4}{2p^2-6p+4}$. ▲

Problème 1 : Au camping "*Les flots bleus*"

Partie I. Calcul matriciel

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. L'algorithme de Gauss-Jordan donne successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis finalement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\blacktriangle$

2. Calculons $121 \times \left(P^{-1} \times M \times P\right)$:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 132 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où je tire $P^{-1} \times M \times P = D$. $\blacktriangle$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ la matrice $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/12)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

4. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

Initialisation : lorsque $n = 0$ tout le monde vaut l'identité. Montrons le cas $n = 1$.
D'après la question précédente $P^{-1} \times M \times P = D$. Multiplions les deux membres de cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1}, il vient

$$M = P \times D \times P^{-1}$$

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ alors par associativité du produit matriciel, il vient

$$M^{n+1} = M \times \left(P \times D^n \times P^{-1}\right) = \left(P \times D \times P^{-1}\right) \times \left(P \times D^n \times P^{-1}\right) = (P \times D) \times \left(P^{-1} \times P\right) \times \left(D^n \times P^{-1}\right)$$

En utilisant la relation $P^{-1} \times P = I$, j'en déduis finalement que $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.
Conclusion : par récurrence, nous avons démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad M^n = P \times D^n \times P^{-1}$. $\blacktriangle$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. Caclulons $11 \times P \times D^n \times P^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/12)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2(1/12)^n & 6 \\ 0 & (1/12)^n & 3 \\ 0 & -3(1/12)^n & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6+16\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3+8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2-24\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}
\end{array}$$

D'où je tire finalement

$$M^n = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6+16\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3+8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2-24\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$$

▲

Partie II. Probabilités

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit les événements

- A_n "*Léo choisit l'atelier le jour* n,
- B_n "*Léo choisit le ballon le jour* n,
- C_n "*Léo choisit le cheval le jour* n,

et on note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives de ces évènements.

1. L'énoncé se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \begin{cases} p(A_{n+1}|A_n) = \frac{1}{2}, & p(B_{n+1}|A_n) = \frac{1}{4}, \quad p(C_{n+1}|A_n) = \frac{1}{4} \\ p(A_{n+1}|B_n) = \frac{2}{3}, & p(B_{n+1}|B_n) = \frac{1}{3}, \\ p(A_{n+1}|C_n) = \frac{1}{2}, & p(B_{n+1}|C_n) = \frac{1}{4}, \quad p(C_{n+1}|C_n) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Comme au premier jour Léo choisit une activité au hasard, $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}$. ▲

2. Appliquons la formule des probabilités totales pour les système complet d'événements non négligeables A_n, B_n, C_n. Il vient

$$p(A_{n+1} = p(A_n) \times p(A_{n=1}|A_n) + p(B_n) \times p(A_{n=1}|B_n) + p(C_n) \times p(A_{n=1}|C_n).$$

Introduisons les notations a_n, b_n et c_n. Grâce à la question précédente, nous obtenons :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

En procédant de la même manière nous déduisons de la formule des probabilités totales et de la question précédente, les relations

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n & +\frac{2}{3}b_n & +\frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n & +\frac{1}{3}b_n & +\frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n & & +\frac{1}{4}c_n. \end{cases}$$

▲

3. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$M \times X_n = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = X_{n+1},$$

la dernière égalité provenant de la question précédente. ▲

4. Une récurrence immédiate permet alors de conclure que pour tout entier naturel non nul n

$$X_n = M^{n-1} \times X_1$$

▲

5. Substituons dans l'égalité ci-dessus l'expression obtenue pour M^n à la question **5** de la **Partie I**, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \left\{ \begin{array}{lll} a_n & = & \dfrac{18 + 4 \times 12^{-n+1}}{33} \\ b_n & = & \dfrac{9 + 2 \times 12^{-n+1}}{33} \\ c_n & = & \dfrac{6 - 6 \times 12^{-n+1}}{33} \end{array} \right. .$$

▲

6. Par opérations algébriques sur les suites convergentes, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{18}{33}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{9}{33}, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{6}{33}.$$

▲