Corrigé du Devoir Surveillé n° 8

Exercice 1 : Puissances successives d'endomorphismes

Dans la suite de l'exercice on considère un couple (a, b) de réels distincts, $T \in \mathbb{R}_2[X]$ le polynôme défini par

$$T = (X - a)(X - b)$$

et $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme de E satisfaisant la relation polynomiale

$$T(u) = \Theta$$

1. Exemple : dans cette question, on suppose que $a = 1$ et $b = -1$.

a. Par construction $(u - id_E) \circ (u + id_E) = 0$, c'est-à-dire $u^2 - id_E = 0$, soit encore $u^2 = id_E$. Par conséquent u^n est soit u, soit id_E suivant la parité de n. Plus précisément

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^{2k} = id_E \quad \text{et} \quad u^{2k+1} = u.$$

b. u vérifiant la relation $u^2 = id_E$ est une symétrie. ▲

2. Etude d'un endomorphisme auxiliaire :

a. Le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ s'énonce ainsi : étant donnés deux polynômes A et B, $B \neq 0$ il existe un couple (Q, R) de polynômes, unique tel que :

- $A = B \times Q + R$
- $d^\circ R < d^\circ B$

▲

b. Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par T. Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
Soit P_1, P_2 des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et λ_1, λ_2 des scalaires. D'après le théorème de la division euclidienne, P_1 et P_2 s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & B_1 \times T + \varphi(P_1) \\ P_2 & = & B_2 \times T + \varphi(P_2) \end{array}$$

Il en résulte que

$$\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 = \underbrace{(\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2)}_{B} \times T + \underbrace{\lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)}_{R}$$

Remarquons – par les propriétés du degré des polynômes– que le degré de $R = \lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)$ est strictement inférieur au degré de T. Par suite la décomposition $\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 = B \times T + R$ est la division euclidienne de $\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2$ par T. Par unicité du reste dans la division euclidienne, il s'ensuit que $\varphi\big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big) = \lambda_1 \cdot \varphi(P_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(P_2)$. ▲

c. Comme pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, le degré du reste dans la division euclidienne de P par T est strictement inférieur à 2, il est clair que $\mathsf{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}_1[X]$. Réciproquement, si $R \in \mathbb{R}_1[X]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, la division euclidienne de R par T donne

$$R = 0 \times T + R$$

Par suite $R = \varphi(R)$. En particulier, $R \in \mathsf{Im}\,\varphi$. Par double-inclusion, nous avons démontré que $\mathsf{Im}\,\varphi = \mathbb{R}_1[X]$.
Pour déterminer le noyau de φ, procédons par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathsf{Ker}\,\varphi & \iff & \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ \text{telque P = Q} \times \text{T} \\ & \iff & T \text{ divise P.} \end{array}$$

D'où $\mathsf{Ker}\,\varphi = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid T \text{ divise P}\}$.
Comme $\mathsf{Im}\,\varphi \neq \mathbb{R}[X]$, φ n'est pas surjectif. Comme $T \in \mathsf{Ker}\,\varphi$, $\mathsf{Ker}\,\varphi \neq \{\vec{0}\}$ φ n'est pas injectif non plus. ▲

3. On note $A = X - a$ et $B = X - b$.

a. Pour montrer que $\{A, B\}$ forme une base de $\mathbb{R}_1[X]$, utilisons la caractérisation des bases : soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Par définition, il existe des constantes λ et μ telles que P s'écrivent $P = \lambda + \mu X$. Montrons que P s'écrit de façon unique sous la forme $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$. Procédons par identification des coefficients :

$$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & \mu \\ a\alpha + b\beta & = & -\lambda \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{\lambda + b\mu}{b - a} \\ \beta & = & -\dfrac{\lambda + a\mu}{b - a} \end{array} \right. .$$

Ainsi, tout polynôme de degré inférieur ou égal à 1 se décompose de façon unique sous la forme $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$. Par conséquent $\{A, B\}$ forme une base de $\mathbb{R}_1[X]$. ▲

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, $\{A, B\}$ forme une base de $\mathbb{R}_1[X]$. Comme $\varphi(X^n) \in \mathbb{R}_1[X]$, ce polynôme s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de A et de B. Par conséquent, il existe un couple de réels (a_n, b_n) **unique** tel que

$$\varphi(X^n) = a_n\, A + b_n\, B$$

▲

c. Soit $n \in \mathbb{N}$, écrivons la division euclidienne de X^n par T. Avec les notations ci-dessus, il vient

$$X^n = Q_n \times T + a_n\, A + b_n\, B.$$

Pour déterminer les coefficients a_n et b_n, évaluons l'égalité ci-dessus en a et b, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} a^n & = & \tilde{Q}_n(a) \times \tilde{T}(a) + a_n\, \tilde{A}(a) + b_n\, \tilde{B}(a) \\ b^n & = & \tilde{Q}_n(b) \times \tilde{T}(b) + a_n\, \tilde{A}(a) + b_n\, \tilde{B}(b) \end{array}$$

Comme $\tilde{T}(a) = \tilde{A}(a) = 0$ et $\tilde{T}(b) = \tilde{B}(b) = 0$, nous en déduisons que

$$\boxed{a_n = \frac{b^n}{b - a} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{a^n}{a - b}}$$

▲

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente :

$$X^n = Q_n \times T + \frac{b^n}{b - a}\,(X - a) - \frac{a^n}{b - a}\,(X - b).$$

Appliquons ceci à l'endomorphisme u. Comme par construction $T(u) = \Theta$, il vient :

$$\boxed{u^n = \frac{b^n}{b - a}\,\big(u - a\; Id_E\big) - \frac{a^n}{b - a}\,\big(u - b\; Id_E\big)}$$

▲

Problème 1 : Gain associé à un jeu de pile ou face

Notations :

On désigne par n et N des nombres entiers naturels non nuls et par x un nombre réel **srtictement** compris entre 0 et 1.

On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce.
On note pour tout entier naturel non nul k, P_k l'événement “ *Pile est obtenu au* $k^{\text{ième}}$ *tirage*”.

On suppose que la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet est $1 - x$ et que la probabilité d'obtenir face est x. Les jets sont supposés **indépendants**.

On désigne enfin par
- S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers jets,
- T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la $n^{\text{ième}}$ fois.

Partie I. Préliminaire

Soit $x \in]0,1[$ fixé. 0n note, pour tout couple d'entiers $(n,r) \in \mathbb{N}^2$, $s(n,r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} x^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, un changement d'indice conduit à

$$s(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} x^k = \sum_{k=r}^{n+r} \binom{k}{r} x^{k-r}$$

Ainsi, $s(n,r)$ apparaît comme la somme partielle d'ordre $n+r$ de la série géométrique dérivée r fois de raison x. Comme $0 < x < 1$, cette série est convergente de somme :

$$\boxed{s(r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}}$$

▲

Partie II. Temps d'attente du $r^{\text{ième}}$ succès

1. S_n est le nombre de succès en n tentatives indépendantes, donc $S_n \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, 1-x)$. D'où
- $S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$,
- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P[S_n = k] = \binom{n}{k}(1-x)^k \cdot x^{n-k}$,
- $E(S_n) = n \cdot (1-x)$ et $V(S_n) = n\,x \cdot (1-x)$. ▲

2. T_1 représente le temps d'attente du premier succès dans une suite d'expérience de Bernouilli indépendantes et de même paramètre, donc $T_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}(1-x)$. Par conséquent
- $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^\star$,
- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P[T_1 = k] = (1-x) \cdot x^{k-1}$,
- $E(T_1) = \dfrac{1}{1-x}$ et $V(T_1) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. ▲

3. Soient $k \in \mathbb{N}$ un nombre entier naturel et $r \in \mathbb{N}^\star$ un nombre entier naturel non nul.

a. $[T_r = k+r]$ est réalisé *si et seulement si* le $(k+r)^{\text{ième}}$ tirage a donné *Pile* et au cours des $(k+r-1)$ premiers tirages on a obtenu exactement $r-1$ fois *Pile*. Par conséquent :

$$[T_r = k+r] = [S_{k+r-1} = r-1] \cap P_{k+r}$$

▲

b. D'où $T_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$. De plus comme les jets sont indépendants nous avons pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P[T_r = k+r] &= (1-x) \times P[S_{k+r-1} = r-1] \\ &= (1-x) \times \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^{r-1} \cdot x^k \\ &= \binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r \cdot x^k. \end{aligned}$$

▲

c. D'après la question préliminaire,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P[T_r = k+r] = (1-x)^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k = (1-x)^r \times s(r-1) = 1.$$

▲

4. **a**. Calcul de l'espérance de T_r. D'après la question préliminaire la série $\sum(k+r)P[T_r = k+r]$ est (absolument) convergente et

$$\begin{aligned}
E(T_r) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)\,P[T_r = k+r] \\
&= (1-x)^r \sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)\binom{k+r-1}{r-1}x^k \\
&= (1-x)^r \sum_{k=0}^{+\infty} r\binom{k+r}{r}x^k \\
&= r\,(1-x)^r\, s(r) = \frac{r}{1-x}.
\end{aligned}$$

▲

b. D'après la question préliminaire la série $\sum(k+r+1)(k+r)P[T_r = k+r]$ est (absolument) convergente et

$$\begin{aligned}
E\big(T_r \times (1+T_r)\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)(k+r+1)\,P[T_r = k+r] \\
&= (1-x)^r \sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)(k+r+1)\binom{k+r-1}{r-1}x^k \\
&= (1-x)^r \sum_{k=0}^{+\infty} r(r+1)\binom{k+r+1}{r+1}x^k \\
&= r\,(1+r)(1-x)^r s(r+1) = \frac{r\,(r+1)}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

D'où par *linéarité* de l'espérance et la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}
V(T_r) &= E(T_r^2) - E(T_r)^2 = E(T_r^2 + T_r) - E(T_r) - E(T_r)^2 \\
&= \frac{r}{(1-x)^2}\,\big(r+1-(1-x)-r\big) \\
&= \frac{rx}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

▲

Partie III. Gain du joueur

Soient a un nombre réel strictement positif et λ un nombre réel strictement supérieur à 1. Un joueur parie de la façon suivante : lors du $n^{\text{ième}}$ jet, il **mise** la somme a^{n-1} (en euros).

- Si pile sort, il **reçoit** la somme λa^{n-1} et il **perd** sa mise ;
- Sinon il **perd** sa mise.

On désigne par G_n la somme des profits et des pertes (celles-ci étant comptées négativement) du joueur après son $n^{\text{ième}}$ succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

1. On suppose que $a = 1$.

a. Remarquons qu'à chaque jet le joueur paie 1 euro, et ce jusqu'au dernier lancer. D'autre part, le joueur empoche λ euros à son dernier lancer. Par conséquent

$$G_1 = +\lambda - T_1.$$

En particulier $$E(G_1) = \lambda - E(T_1) = \lambda - \frac{1}{1-x}.$$ ▲

b. Plus généralement, si $r \in \mathbb{N}^\star$, jusqu'à son $r^{\text{ième}}$ succès, le joueur paie à chaque lancer le saomme de 1 euro. D'autre part, à chacune de ses r succès, il empoche λ euros. Par conséquent

$$G_r = +r\ \lambda - T_r.$$

D'après la question **II.4** j'en déduis que $$E(G_r) = \lambda\ r - E(T_r) = r\ \big(\lambda - \frac{1}{1-x}\big).$$ ▲

2. On suppose que $a > 1$.

a. Après son premier succès, le joueur

a perdu ses mises successives : $1 + a + \cdots + a^{T_1 - 1} = \sum_{k=1}^{T_1} a^{k-1}$,

a gagné lors de son dernier jet (et premier succès) la somme de $\lambda\ a^{T_1 - 1}$.

Au final le montant de ses gains algébriques après lson premier succès vaut :

$$\begin{aligned} G_1 &= \lambda\ a^{T_1-1} + \sum_{k=1}^{T_1} a^{k-1} \\ &= \lambda\ a^{T_1-1} - \frac{1 - a^{T_1}}{1-a}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{G_1 = a^{T_1-1}\ (\lambda + \frac{a}{1-a}) - \frac{1}{1-a}}$$

▲

b. D'après l'expression ci-dessus G_1 possède une espérance *si et seulement si* a^{T_1} possède une espérance et dans ce cas

$$E(G_1) = (\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1-a})E(a^{T_1} - \frac{1}{1-a}.$$

Etudions l'existence de l'espérance de a^{T_1}. D'après le théorème de transfert, a^{T_1} admet une espérance *si et seulement si* la série $\sum a^k P[T_1 = k]$ est (absolument) convergente. Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a^k P[T_1 = k] &= \sum_{k=1}^{n} a^k (1-x)\ x^{k-1} \\ &= a\ (1-x) \sum_{k=1}^{n} (ax)^{k-1} \\ &= a\ (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (ax)^k. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons ici la somme partielle d'une série géométrique de raison ax. Elle converge donc *si et seulement si* $ax < 1$.

Résumons : a^{T_1} et G_1 admettent une espérance *si et seulement si* $ax < 1$.

Dans ce cas,

$$\boxed{\begin{aligned} E(a^{T_1}) &= \frac{a\ (1-x)}{1-ax} \\ E(G_1) &= \left(1 - \frac{a\ (1-x)}{1-ax}\right) \times \left(\frac{1 - \lambda(1-x)}{a-1}\right) \end{aligned}}$$

▲

c. Après son deuxième succès, le joueur

a perdu ses mises successives : $1 + a + \cdots + a^{T_2-1} = \sum_{k=0}^{T_2-1} a^k = \frac{a^{T_2} - 1}{a-1}$,

a gagné lors de son premier succès et deuxième succès la somme de $\lambda\ a^{T_1-1} + \lambda\ a^{T_2-1}$.

Au final le montant de ses gains algébriques après son deuxième succès vaut :

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{a^{T_2} - 1}{a-1} + \lambda\ a^{T_1-1} + \lambda\ a^{T_2-1} \\ &= \frac{1}{1-a}\left[\frac{\lambda\ (a-1)}{a} \times a^{T_1} + \left(\frac{\lambda\ (a-1)}{a} - 1\right) \times a^{T_2} - 1\right]. \end{aligned}$$

Les coefficients multiplicatifs de a^{T_1} et a^{T_2} étant strictement positifs, il en résulte que

$$G_2 \text{ admet une espérance } \textit{ si et seulement si } \ a^{T_1} \text{ et } a^{T_2} \text{ possèdent une espérance.}$$

Etudions l'existence d'une espérance pour a^{T_2}. Etant donné un entier naturel $n \in \mathbb{N}^\star$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a^{k+2} P[T_2 = k+2] &= a^2\ (1-x)^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{k+1}{1}\ (ax)^k \\
&= a^2\ (1-x)^2 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{k}{1}\ (ax)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons ici une somme partielle de la série géométrique de raison ax dérivée une fois. Elle converge *si et seulement si* $ax < 1$, auquel cas, d'après le théorème de transfert

$$E(a^{T_2}) = \frac{a^2\ (1-x)^2}{(1-ax)^2}.$$

Par conséquent

$$G_2 \text{ admet une espérance } \textit{ si et seulement si } \ ax < 1.$$

Et dans ce cas,

$$\begin{aligned}
E(G_2) &= \frac{1}{1-a}\left[\frac{\lambda\ (a-1)}{a} \times E(a^{T_1}) + \left(\frac{\lambda\ (a-1)}{a} - 1\right) \times E(a^{T_2}) - 1\right] \\
&= \frac{1}{1-a}\left[\frac{\lambda\ (a-1)}{a} \times \frac{a\ (1-x)}{1-ax} + \left(\frac{\lambda\ (a-1)}{a} - 1\right) \times \frac{a^2\ (1-x)^2}{(1-ax)^2} - 1\right] \\
&= \frac{1}{1-a}\left[\lambda(a-1)\ \frac{1-x}{1-ax} + \left(\lambda\ a\ (a-1) - a^2\right)\ \frac{(1-x)^2}{(1-ax)^2} - 1\right]
\end{aligned}$$

▲

d. Soit, plus généralement, r un nombre entier naturel non nul. Nous obtenons de façon analogue

$$\begin{aligned}
G_r &= \lambda\ \left(a^{T_1-1} + \cdots + a^{T_r-1}\right) - \sum_{k=1}^{T_r} a^{k-1} \\
&= \frac{\lambda}{a}\ \left(a^{T_1} + \cdots + a^{T_r}\right) - \frac{a^{T_r} - 1}{a-1} \\
&= \frac{\lambda}{a}\ \left(a^{T_1} + \cdots + a^{T_{r-1}}\right) + (\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{a-1})a^{T_r} + \frac{1}{a-1}.
\end{aligned}$$

D'après la deuxième expression de G_r, il apparaît que G_r admet une espérance *si et seulement si* chacune des variables aléatoires a^{T_p} possède une espérance. Or un calcul analogue à ceux de $E(a^{T_1})$ et $E(a^{T_2})$ montre que ces espérances existent à la condition nécessaire et suffisante que $ax < 1$. Auquel cas, en utilisant les préliminaires –ou en notant qu'il s'agit d'une série géométrique de raison ax dérivée $p-1$ fois– nous avons

$$\begin{aligned}
E(a^{T_p}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k+p}\ P[T_p = k+p] \\
&= (1-x)^p\ a^p \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+p-1}{p-1} a^k\ x^k \\
&= \frac{a^p\,(1-x)^p}{(1-ax)^p}.
\end{aligned}$$

Comme

$$E(G_r) = \frac{\lambda}{a}\ \left(E(a^{T_1}) + \cdots + E(a^{T_{r-1}})\right) + (\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{a-1})E(a^{T_r}) + \frac{1}{a-1},$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
E(G_r) &= \frac{\lambda}{a}\ \sum_{p=1}^{r-1} \left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^p + (\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{a-1})\ \left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^r + \frac{1}{a-1} \\
&= \frac{\lambda}{a}\ \frac{a\,(1-x)}{1-ax}\ \frac{1 - \left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r-1}}{1 - \frac{a\,(1-x)}{1-ax}} + (\frac{\lambda}{a} - \frac{1}{a-1})\ \left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^r + \frac{1}{a-1}.
\end{aligned}$$

En remarquant que $1-\dfrac{a\,(1-x)}{1-ax}=\dfrac{1-a}{1-ax}$, nous obtenons après simplifications :

$$\begin{aligned}
E(G_r) &= \frac{\lambda\,(1-x)}{1-a}\left(1-\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r-1}\right)+\frac{\lambda\,(a-1)-a}{a\,(a-1)}\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}+\frac{1}{a-1}\\
&= \frac{\lambda\,(1-x)}{1-a}+\frac{1}{a-1}+\frac{\lambda\,(1-ax)}{a\,(a-1)}\times\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}+\frac{\lambda\,(a-1)-a}{a\,(a-1)}\times\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}\\
&= \frac{1-\lambda(1-x)}{a-1}+\frac{\lambda a-a-a\lambda x}{a\,(a-1)}\times\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}\\
&= \frac{1-\lambda(1-x)}{a-1}-\frac{1-\lambda(1-x)}{a-1}\times\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}\\
&= \frac{1-\lambda(1-x)}{a-1}\times\left(1-\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $E(G_r)$ existe si et seulement si $ax<1$ et dans ce cas,

$$\boxed{E(G_r)=\left(1-\frac{a^r(1-x)^r}{(1-ax)^r}\right)\times\left(\frac{1-\lambda(1-x)}{a-1}\right)}$$

▲

e. On suppose dans cette question que $ax<1$ de sorte que $E(G_r)$ soit bien défini.

– Lorsque r tend vers $+\infty$:

- Si $\lambda(1-x)=1$, alors la suite $\big(E(G_r)\big)_{r\in\mathbb{N}^\star}$ est constante à 0.
- Si $\lambda(1-x)<1$Comme $a>1$ $a-ax>1-ax$ de sorte que $\dfrac{a\,(1-x)}{1-ax}>1$. Par conséquent la suite géométrique $\left(\left(\dfrac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}\right)_{r\in\mathbb{N}^\star}$ est divergente vers $+\infty$. Il en résulte que $\big(E(G_r)\big)_{r\in\mathbb{N}^\star}$ est divergente vers $-\infty$.
- Si $\lambda(1-x)>1$, $\big(E(G_r)\big)_{r\in\mathbb{N}^\star}$ est divergente vers $+\infty$. ▲

– Lorsque a tend vers 1 par valeurs supérieures :

Remarquons que $1-\dfrac{a^r(1-x)^r}{(1-ax)^r}$ a pour limite 0 lorsque a tend vers 1^+. Il y a donc une indétermination.

Posons $X=\dfrac{a\,(1-x)}{1-ax}-1=\dfrac{a-1}{1-ax}$. Alors

- $\lim\limits_{a\to1^+}X(a)=0$
- $(1+X)^r-1\sim_0\ r\ X$

Par conséquent,

$$1-\left(\frac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}\sim_{1^+}-r\ \frac{a-1}{1-ax}.$$

D'où

$$E(G_r)\sim_{1^+}-r\ \frac{a-1}{1-ax}\times\frac{1-\lambda(1-x)}{a-1}=-r\ \frac{1-\lambda(1-x)}{1-ax}.$$

Par conséquent $(E(G_r))$ possède une limite lorsque a tend vers 1 par valeurs supérieures et :

$$\boxed{\lim_{a\to1^+}E(G_r)=r\big(\lambda-\frac{1}{1-x}\big)}$$

Nous retrouvons ainsi la valeur obtenue à la question **III.1.b**. ▲

3. On suppose que $a<1$.

a. Comme $a<1$, a $fortiori$, $ax<1$ et l'espérance de a^{T_1} est bien définie ainsi que toutes les espérances des variables aléatoires a^{T_p}. En conséquence G_r admet une espérance qui est donnée par la formule de la question **III.2.d**.

D'autre part, comme $a<1$, il est clair que $\dfrac{a\,(1-x)}{1-ax}<1$. Ainsi, la suite géométrique $\left(\left(\dfrac{a\,(1-x)}{1-ax}\right)^{r}\right)_{r\in\mathbb{N}^\star}$

est convergente de limite nulle. Par opérations algébriques sur les suites convergentes, il en résulte que $\big(E(G_r)\big)$ est convergente et

$$\lim_{r\to\infty} E(G_r) = \frac{1-\lambda(1-x)}{a-1}.$$

▲

b. Soit g_k la somme des profits et des pertes réalisés lors du $k^{\text{ième}}$ jet. Notons B_k la variable aléatoire prenant la valeur :
– 1 si $Pile$ sort au $k^{\text{ième}}$ jet,
– 0 si $Face$ sort u $k^{\text{ième}}$ jet.
B_k est une variable de Bernouilli de paramètre $1-x$. De plus

$$g_k = \lambda\ a^{k-1} \times B_k - a^{k-1} = \big(\lambda \cdot B_k - 1\big) \times a^{k-1}$$

Par conséquent –ce n'est pas demandé mais c'est utile pour la dernière question...

$$\boxed{E(g_k) = \big(\lambda \cdot E(B_k) - 1\big) \times a^{k-1} = \big(\lambda \cdot (1-x) - 1\big) \times a^{k-1}}$$

▲

c. Soit H_m le gain (algébrique) réalisé après m jets. H_m est la somme des gains associés à chacun des m premiers tirages. Autrement dit :

$$H_m = \sum_{k=1}^{m} g_k = \sum_{k=1}^{m} \big(\lambda \cdot B_k - 1\big) \times a^{k-1}$$

Par *linéarité* de l'espérance, il en résulte que

$$\begin{aligned} E(H_m) &= \sum_{k=1}^{m} E(g_k) = \big(\lambda \cdot (1-x) - 1\big) \times \sum_{k=1}^{m} a^{k-1} \\ &= \big(\lambda \cdot (1-x) - 1\big)\ \frac{a^m - 1}{a-1}. \end{aligned}$$

Lorsque m tend vers $+\infty$:
a étant strictement inférieur à 1, $\big(E(H_m)\big)_{m\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} E(H_m) = \frac{1-\lambda\ (1-x)}{a-1}}$$

▲