Corrigé du Devoir Surveillé n°8

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1$, et la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4\,u_{n+2} - 5\,u_{n+1} + 2\,u_n.$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. **a**.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},\ \text{où } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲

b.

$$\begin{array}{cccc} & & \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ (A-I)^2 \times (A-2I) = & \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, $(A-I)^2 \times (A-2I) = 0$. ▲

2. Soit $P(X) = (X-1)^2\,(X-2)$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Faisons la *division euclidienne* de X^n par P. D'après le théorème de la division euclidienne, comme P n'est pas le polynôme nul, il existe un couple (Q_n, R_n) de polynômes, **unique** tel que $X^n = PQ_n + R_n$. avec $d^\circ R_n < d^\circ P$, ie. $QR_n \in \mathbb{R}_2[X]$. ▲

b. $1, (X-1)$ et $(X-1)^2$ sont *linéairement indépendants* car ils sont échelonnés en degré. Comme de plus ils sont au nombre de $3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X]$, ils forment une *famille libre maximale* de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est *donc une base* de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, tout poynôme de degré inférieur ou égal à 2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces polynômes.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. comme R_n est de degré inférieur ou égal à 2, il s'écrit comme combinaison linéaire de ces polynômes :
il existe donc $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(X) = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2.$$

▲

c. Nous avons obtenu la relation polynomiale

$$X^n = P\,Q_n + a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2 \tag{1}$$

Pour en déduire les valeurs a_n, b_n, c_n, je remarque que 1 est racine double de P et 2 est racine simple. Evaluons (1) aisni que sa dérivée aux points 1 et 2. Il vient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & a_n \\ n & = & b_n \\ 2^n & = & a_n + b_n + c_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & 1 \\ vecb_n & = & n \\ c_n & = & 2^n - n - 1 \end{array}\right.$$

▲

3. **a**. D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$(2) \qquad X^n = (X-1)^2(X-2) \times Q_n + 1 + n(X-1) + (2^n - n - 1)(X-1)^2$$

Appliquons cette relation polynomiale à la matrice A. Comme $(A-I)^2 \times (A-2I) = 0$, il reste :

$$A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2$$

▲

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Explicitons cette dernière relation matricielle. Il vient

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (2^n - n - 1) \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, la dernière ligne de A^n est

$$\begin{pmatrix} 2^n - n - 1 & 3n + 2 - 2^{n+1} & 2^n - 2n \end{pmatrix}$$

▲

4. **a**. La suite de matrices colonnes (X_n) vérifie la condition initiale $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $X_{n+1} = A \times X^n$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \times X_0$. ▲

b. En particulier, la dernière ligne de cett matrice vaut u_n. Nous obtenons :

$$u_n = \begin{pmatrix} 2^n - n - 1 & 3n + 2 - 2^{n+1} & 2^n - 2n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2n - 2^n + 1$$

▲

EXERCICE 2 :

Partie I. Etude d'un cas particulier

Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$canoniquement associé à la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. La matrice représentative de $u \circ u$ est

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ M^2 = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Par suite, la matrice représentative de $u^2 - 3u + 2Id_{\mathbb{R}^3}$ est :

$$M^2 - 3M + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $u^2 - 3u + 2Id_{\mathbb{R}^3} = 0$. ▲

2. Par linéarité de u, il vient $u(\vec{b}_1) = u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_3)$. Les coordonnées de $u(\vec{b}_1)$ sont donc obtenues en ajoutant les colonnes 1 et 3 de la matrice M. J'en déduis $u(\vec{b}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 = \vec{b}_1$. ▲

3. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\mathsf{Ker}\,(u - 2\,Id_{\mathbb{R}^3})$ si et seulement si $(u - 2Id_{\mathbb{R}^3})(\vec{x}) = \vec{0}$. Cette équation vectorielle se traduit par le système d'équations linéaires

$$(M-2I)\times X = 0 \iff \begin{cases} -x_1 & +x_2+0x_3 & & 0 & = \\ 0x_1 & & +0x_2 & +0x_3 & =0 \\ -x_1 & & +x_2 & 0x_3 & =0 \end{cases} \iff x_1 = x_2$$

D'où $\mathsf{Ker}\,(u-2Id) = \{(x_2, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,;\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} = \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\{(1,1,0);\ (0,0,1)\}$.
Posons $\vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ et $\vec{b}_3 = \vec{e}_3$. D'après le calcul ci-dessus $\{\vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ *engendre* $\mathsf{Ker}\,(u - 2Id_{\mathbb{R}^3}$. De plus, ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, cette famille est *libre*. Il s'agit donc d'une *base* de $\mathsf{Ker}\,(u-2Id)$. ▲

4. Montrons que $\mathcal{B} = (\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme cette famille est de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier qu'elle est libre.
Soit donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 = \vec{0}$. Cette équation vectorielle se traduit par le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & & =0 \\ & \lambda_2 & & =0 \\ \lambda_1 & & +\lambda_3 & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & =0 \\ \lambda_2 & =0 \\ \lambda_3 & =0 \end{cases}$$

5. Montrons que $\mathsf{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathsf{Ker}\,(u - 2Id_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires.
Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, $\vec{x}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\vec{x} = \underbrace{x_1\cdot\vec{b}_1}_{\in \mathsf{Ker}\,(u-Id)} + \underbrace{x_2\cdot\vec{b}_2 + x_3\cdot\vec{b}_3}_{\in \mathsf{Ker}\,(u-2Id)}$$

Remarquons que d'après la question 2, $u(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$, ce qui revient précisément à dire que $\vec{b}_1 \in \mathsf{Ker}\,(u - Id)$. D'autre part, d'après la question 3, $\{\vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ forme une base de $\mathsf{Ker}\,(u-2Id)$.
Ainsi, tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de $\mathsf{Ker}\,(u-Id)$ et d'un vecteur de $\mathsf{Ker}\,(u-2Id)$. Ceci prouve que $E = \mathsf{Ker}\,(u-Id) + \mathsf{Ker}\,(u-2Id)$.
Montrons que la somme est directe. Pour cela, le mieux c'est d'utiliser la caractérisation avec les dimensions (**Corollaire 21.11**) ;
Comme de plus $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} Ker(u-Id) + \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathsf{Ker}\,(u-2Id) = 1+2 = 3 = \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ la somme est directe. ▲

Partie II. Etude du cas général

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geq 1$) et u est un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 - 3u + 2Id_E = 0$. On pose : $v = u - Id_E$ et $w = u - 2Id_E$.

1. Comme $v - w = Id_E$ tout vecteur $\vec{x} \in E$ peut s'écrire :

$$\vec{x} = Id_E(\vec{x}) = \underbrace{v(\vec{x})}_{\in \mathsf{Im}\, v} - \underbrace{w(\vec{x})}_{\in \mathsf{Im}\, w}$$

Ainsi, tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit comme somme d'un vecteur de $\mathsf{Im}\,v$ et d'un vecteur de $\mathsf{Im}\,w$. Par définition, cela signifie précisément que $E = \mathsf{Im}\,v + \mathsf{Im}\,w$. ▲

2. Comme u et Id_E commutent, nous avons $v \circ w = (u-Id)\circ(u-2Id) = u^2 - 3u + 2Id_E = 0$. De même $w \circ v = 0$. Ainsi

$$v \circ w = w \circ v = 0$$

• Montrons que $\mathsf{Im}\,w \subset \mathsf{Ker}\,v$ Il s'agit d'une inclusion ensembliste.
$\boxed{\text{Soit donc } \vec{y} \in \mathsf{Im}\,w}$ arbitraire, montrons que $\vec{y} \in \mathsf{Ker}\,v$.
Comme $\vec{y} \in \mathsf{Im}\,w$, il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = w(\vec{x})$. Par suite $v(\vec{y}) = v(w(\vec{x})) = v \circ w(\vec{x}) = 0\ldots$. Ce qui prouve que $\boxed{\vec{y} \in \mathsf{Ker}\,v}$.
• De même, nous déduisons de l'égalité $w \circ v = 0$ que $\mathsf{Im}\,v \subset \mathsf{Ker}\,w$. ▲

3. Montrons tout d'abord que : $E = \mathsf{Ker}\,v + \mathsf{Ker}\,w$.
D'après la question 1 tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit comme somme d'un vecteur de $\mathsf{Im}\,v$ et d'un vecteur de $\mathsf{Im}\,w$:

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{x}_1}_{\in \mathsf{Im}\, v} + \underbrace{\vec{x}_2}_{\in \mathsf{Im}\, w}$$

Comme d'après la question précédente $\mathsf{Im}\, v \subset \mathsf{Ker}\, w$, $\mathsf{Im}\, w \subset \mathsf{Ker}\, v$ les vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ appartiennent respectivement à $\mathsf{Ker}\, w$ et $\mathsf{Ker}\, v$. La décomposition précédente montre donc que

$$E = \mathsf{Ker}\, v + \mathsf{Ker}\, w$$

Montrons que la somme est directe. Pour ce faire, j'utilise la caractérisation des sommes directes. Il s'agit de prouver que $\mathsf{Ker}\, v \cap \mathsf{Ker}\, w = \{\vec{0}_E\}$.
Soit $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, v \cap \mathsf{Ker}\, w$. Alors $v(\vec{x}) = w(\vec{x}) = \vec{0}$. Par suite, $(v - w)(\vec{x}) = \vec{0}$. Comme d'après la question 1, $v - w = Id_E$, il vient $\vec{x} = \vec{0}$.
Ainsi $E = \mathsf{Ker}\, v + \mathsf{Ker}\, w$ et $\mathsf{Ker}\, v \cap \mathsf{Ker}\, w = \{\vec{0}_E\}$. D'après la caractérisation des sous-espaces supplémentaires, c'est dire que

$$E = \mathsf{Ker}\, v \oplus \mathsf{Ker}\, w$$

▲

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = 2x\, e^x$.

Partie I. Variations de f

1. f est continue et strictement croissante par opérations algébriques sur de telles fonctions. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, 2e]$. Son application réciproque $f^{-1} : [0,2e] \to [0,1]$ est continue et strictement croissante.

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e$

x	0		$2e$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	1

▲

2. Soit $x \in [0,1]$, alors $xe^x = 1 \iff 2xe^x = 2 \iff f(x) = 2$. Comme $2 \in]0, 2e[= f]0,1[$, et que f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]0,2e[$, il existe un unique réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$: $\alpha = f^{-1}(2)$. ▲

Partie II. Convergence d'une suite récurrente (u_n)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \alpha$ et la relation de récurrence, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.

1. D'après la première question f^{-1} induit une application $f^{-1} :]0,1] \to]0,1]$. Ainsi, comme l'intervalle $]0,1]$ est stable par f^{-1} et que $u_0 = \alpha \in]0,1]$, la suite (u_n) est bien définie à valeurs dans $]0,1]$. ▲

2. Soit $x \in]0,1]$, alors $f(x) - x = x(2e^x - 1) > 0$. Comme de plus $f(0) = 0$, nous pouvons conclure que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) - x \geq 0 \text{ avec égalité } \textit{si et seulement si } x = 0.$$

▲

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $u_{n+1} \in]0,1]$, la question précédente montre que $f(un+1) > u_{n+1}$. Comme $f(u_{n+1}) = f \circ f^{-1}(u_n) = u_n$, ceci revient à dire que $u_n > un + 1$.
Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante. ▲

4. La suite (u_n) étant décroissante et positive (donc minorée) elle converge d'après le théorème de la limite monotone. De plus, comme f^{-1} est continue (Partie 1 question 1), (u_n) converge nécessairement vers un point fixe de f^{-1}. D'après la question 2 – de cette partie – 0 est le seul point fixe de f^{-1}. Par conséquent (u_n) est convergente de limite 0. ▲

Partie III. Equivalent de u_n

On pose pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(u_{n+1}) = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}}$, soit encore $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, u_n\, e^{-u_{n+1}}$. ▲

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.

Initialisation : $u_0 = \alpha$ et $\dfrac{e^{-S_0}}{2^0} = e^{-\alpha}$. Comme par construction $\alpha e^{\alpha} = 1$, la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.

D'après la question précédente, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n\, e^{-u_{n+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}}e^{-S_n-u_{n+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}}e^{-S_{n+1}}$.

Conclusion : par récurrence, j'ai prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$. ▲

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $S_n \geq 0$, par croissance de la fonction exponentielle, il vient $e^{-S_n} \leq 1$. Par suite

$$0 \leq u_n \leq (1/2)^n.$$

La série géométrique de raison $1/2 \in]0,1[$ étant convergente, l'inégalité ci-dessus montre, grâce au théorème de convergence par comparaison pour les séries à termes positifs, que la série de terme général u_n est convergente et que

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

De plus, le théorème de convergence des séries à termes positifs montre que $L = \sup_n S_n$. En particulier $L \geq S_0 = \alpha$. Ainsi,

$$\alpha \leq L \leq 2.$$

▲

4. Comme la suite des sommes partielles est convergente de limite L, la caractérisation séquentielle de la continuité de la fonction exponentielle permet d'en déduire que la suite (e^{-S_n}) est convergente vers $e^{-L} \in \mathbb{R}^{\star}$. Comme $e^{-L} \neq 0$ ceci revient à dire que $e^{-S_n} \sim_{+\infty} e^{-L}$. Par compatibilité des équivalents avec le produit, j'en déduis finalement que

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{e^{-L}}{2^n}$$

▲

Problème 1 :

On définit

- $T : \Omega \to \mathbb{N}^{\star}$ la *durée de vie* d'un composant électronique.
- $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, la fonction de répartition de T,
- $D : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ la *loi de survie* du composant : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad D(t) = 1 - F(t)$.

On suppose que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $D(n) \neq 0$.

Partie I. Coefficient d'avarie

On not $\pi_n = P\big([T = n] \,|\, [T > n-1]\big)$ le *coefficient d'avarie* du composant à l'instant n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$, par définition de la fonction de répartition, $D(n) = 1 - F(n) = 1 - P[T \leq n] = P[T > n]$. Pour exprimer $P[T = n]$ à l'aide de la fonction D, on utilise l'astuce usuelle

$$D(n-1) = P[T > n-1] = P\Big([T = n] \cup [T > n]\Big) = P[T = n] + D(n)$$

D'où l'on tire $P[T = n] = D(n-1) - D(n)$. Enfin, en remarquant que $[T = n] \cap [T > n-1] = [T = n]$, on en déduit

$$\pi_n = \frac{P\big([T = n] \cap [T > n-1]\big)}{P[T > n-1]} = \frac{P[T = n]}{P[T > n-1]} = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}.$$

▲

2. Soit $p \in]0,1[$. On suppose que $T \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ suit la loi géométrique de paramètre p.

a. Comme T suit la loi géométrique de paramètre p,

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^\star$;
- $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $P[T = k] = p\,(1-p)^{k-1}$;
- T admet une espérancet $E(T) = \dfrac{1}{p}$. ▲

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, comme $p \in]0,1[$, $q = 1-p$ est strictement inférieur à 1 et par conséquent les séries géométriques ci-dessous sont toutes convergentes,

$$\begin{aligned} D(n) &= P[T \geq n+1] = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P[T = k] = p \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= p\,q^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-n-1} = p\,q^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= \frac{p\,q^n}{1-q} = q^n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul $\boxed{D(n) = q^n = (1-p)^n}$. ▲

c. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. D'après la question 1 et la question précédente :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} = \frac{q^{n-1} - q^n}{q^{n-1}} = 1 - q = p$$

▲

3. Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, $\pi_n = \alpha$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul.
D'une part, d'après la question 1, nous avons $P[T = n] = D(n-1) - D(n)$.
D'autre part, $P[T = n] = P\big([T = n] \cap [T > n-1]\big) = P\big([T = n] \mid [T > n-1]\big) \times P[T > n-1] = D(n-1) \times \pi_n$.
Il en résulte en particulier que $D(n-1) - D(n) = D(n-1) \times \pi_n$, c'est-à-dire

$$D(n) = (1-\alpha) D(n-1)$$

▲

b. D'après la question précédente, la suite $D(n)$ est une suite géométrique de raison $1-\alpha$. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D(n) = (1-\alpha)^n\, D(0)$. Comme par hypothèse $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^\star$, $F(0) = 0$. J'en déduis donc que $D(0) = 1 - F(0) = 1$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D(n) = (1-\alpha)^n.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^\star$. D'après la question 1, il vient

$$P[T = n] = D(n-1) - D(n) = (1-\alpha)^{n-1}\,\big(1 - (1-\alpha)\big) = \alpha\,(1-\alpha)^{n-1}$$

Par conséquent T suit la loi géométrique de paramètre α. ▲

Remarque : Dans la question 3, on prouve une caractérisation de la loi géométrique comme loi discrète sans mémoire (Cf **Théorème 18.6**).

Partie II. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, T_i désigne la durée de vie du $i^{\text{ième}}$ composant. On suppose que $T_i \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ et que les durées de vie des composants électroniques successifs sont indépendantes.

Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $S_k = T_1 + \cdots + T_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T_i$ est l'instant où se produit la $k^{\text{ième}}$ panne (et aussi le $k^{\text{ième}}$ remplacement).

1. Loi de $S_2 = T_1 + T_2$.

a. Comme les composants installés fonctionnent au moins un instant avant de tomber en panne, S_2 est toujours supérieur ou égal à 2. En revanche, S_2 n'est pas majoré *a priori*, donc $S_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. ▲

b. Soit $n \geq 2$. L'événement $[S_2 = n]$ se traduit par la deuxième panne survient à l'instant n. Pour représenter $[S_2 = n]$, nous pouvons *discuter* suivant l'instant de la première panne, *i.e.* suivant la durée de vie du premier composant électronique.
Par exemple l'événement $S_2 = n]$ est réalisé lorsque le premier composant "*dure* " $n-5$ instants et que le deuxième "*dure*" 5 instants. Plus précisément

$$\begin{aligned} [S_2 = n] &= \big([T_1 = 1] \cap [T_2 = n-1]\big) \cup \big([T_1 = 2] \cap [T_2 = n-2] \cup \cdots \cup \big([T_1 = n-1] \cap [T_2 = 1] \\ &= \bigcup_{i=1} n-1\big([T_1 = i] \cap [T_2 = n-i] \end{aligned}$$

Par additivité finie de la probabilité P, j'en déduis d'abord que $P[S_2 = n] = \sum_{i=1}^{n-1} P\big([T_1 = i] \cap [T_2 = n-i]$.

De plus, comme les durées de vies des différents composants sont indépendantes, il en résulte que

$$\begin{aligned} P[S_2 = n] &= \sum_{i=1}^{n-1} P\big([T_1 = i] \cap [T_2 = n-i] = \sum_{i=1}^{n-1} P[T_1 = i] \times P[T_2 = n-i] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p\, q^{i-1}\, p\, q^{n-i-1} = \boxed{(n-1)\, p^2\, q^{n-2}} \end{aligned}$$

▲

2. Loi de S_k, pour $k \geq 2$.

a. Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Montrons par récurrence sur n que

$$\forall n \in]\!]m; +\infty[\![; \qquad \sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Initialisation : lorsque $n = m$, alors $\binom{n}{m} = 1 = \binom{n+1}{m+1}$.
Hérédité : Soit $n \geq m$ tel que $\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$. *Then* PASCAL*'s formula yields :*

$$\begin{aligned} \binom{n+2}{m+2} &= \binom{n+1}{m} + \binom{n+1}{m+1} = \sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} + \binom{n+1}{m} \\ &= \sum_{j=m}^{n} n+1 \binom{j}{m} \end{aligned}$$

Conclusion : par récurrence, j'ai démontré ce qu'il fallait. ▲

b. Comme pour $k = 2$, $S_k(\Omega) =]\!]k; +\infty[\![$. ▲

c. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$ que la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k \quad P[S_k = n] = \binom{n-1}{k-1}\, p^k\, (1-p)^{n-k}$$

Initialisation : lorsque $k = 1$, S_1 est la durée de vie du premier composant : $S_1 = T_1$. Comme par hypothèse $T_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad P[S_1 = n] = p\, q^{n-1} = \binom{n-1}{0}\, p\, q^{n-1}$$

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq k \quad P[S_k = n] = \binom{n-1}{k-1}\, p^k\, q^{n-k}$$

Soit $n \geq k+1$, pour calculer $P[S_{k+1} = n]$, je discute suivant la durée de vie du dernier composant, il vient par additivité finie

$$\begin{aligned} P[S_{k+1} = n] &= \sum_{j=1}^{n-1} P\big([S_{k+1} = n] \cap [T_{k+1} = n-j]\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} P[T_{k+1} = n-j] \times P\big([S_{k+1} = n] | [T_{k+1} = n-j]\big) \end{aligned}$$

Pour expliciter $P\big([S_{k+1}=n] | [T_{k+1}=n-j]\big)$, supposons que le dernier composant "dure " $n-j$ instants. Dans ce cas, le $k+1^{\text{ième}}$ changement de composant a lieu à l'instant n *si et seulement si* le $k^{\text{ième}}$ changement est intervenu à l'instant j. Par suite

$$P\big([S_{k+1}=n] | [T_{k+1}=n-j]\big) = P[S_k=j]$$

Nous pouvons donc reprendre le calcul de $P[S_{k+1}=n]$. A l'aide de l'hypothèse de récurrence et de la question précédente, il vient

$$\begin{aligned} P[S_{k+1}=n] &= \sum_{j=1}^{n-1} P[T_{k+1}=n-j] \times P[S_k=j] = \sum_{j=1}^{n-1} p\, q^{n-j-1} \times \binom{j-1}{k-1} p^k\, q^{j-k} \\ &= p^{k+1}\, q^{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{j-1}{k-1} = p^{k+1}\, q^{n-k-1} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{j}{k-1} \\ &= \binom{n-1}{k} p^{k+1}\, q^{n-k-1} \end{aligned}$$

Conclusion : c'est ma foi vrai pour tout k ! ▲

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. U_n désigne le nombre de pannes survenues jusqu'à l'instant n inclus.

a. L'événement $[U_n=0]$ est réalisé *si et seulement si*, au cours des n premiers instants, il n'y a toujours pas eu de pannes. Autrement dit , le premier composant fonctionne encore. Ainsi $[U_n=0]=[T_1 \geq n+1]$. Avec les notations de la partie 1, il vient

$$P[U_n=0] = D(n) = q^n.$$

A l'opposé, $[U_n=n]$ est réalisé, *si et seulement si*, chacun des n premiers composants est tombé en panne dans l'instant qui a suivi son installation, ainsi,

$$[U_n=n] = [T_1=1] \cap [T_2=1] \cap \cdots \cap [T_n=n]$$

Comme les durée de vie des différents composants sont mutuellement indépendantes, il en résulte que :

$$P[U_n=n] = \prod_{k=1}^{n} P[T_k=1] = p^n$$

▲

b. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul.
L'événement $[U_n \geq k]$ est réalisé *si et seulement si*, à l'instant n il a déjà eu au moins k pannes.
Si tel est le cas, la $k^{\text{ième}}$ panne est survenue avant l'instant n. Par conséquent, la réalisation de $[U_n \geq k]$ entraîne celle de $[S_k \leq n]$.
Réciproquement, si $[S_k \leq n]$ il est clair qu"à l'instant n il y a déjà eu au moins k changements. Par conséquent la réalisation de $[S_k \leq n]$ entraîne celle de $[U_n \geq k]$.
Par double-inclusion, j'ai vérifié que $\boxed{[U_n \geq k] = [S_k \leq n]}$. ▲

c. Montrons que U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
- Tout d'abord $U_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$. (c'est déjà un bon point !)
- Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Pour calculer $P[U_k=n]$, commençons par expliciter $P[S_k \leq n]$.

$$\begin{aligned} P[U_n=k] &= P[U_n \geq k] - P[U_n \geq k+1] = P[S_k \leq n] - P[S_{k+1} \leq n] \\ &= \sum_{j=k}^{n} P[S_k=j] - \sum_{j=k+1}^{n} P[S_{k+1}=j] \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1} p^k\, q^{j-k} - \sum_{j=k+1}^{n} \binom{j-1}{k} p^{k+1}\, q^{j-k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k-1} p^k\, q^{j-k} - \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k} p^{k+1}\, q^{j-k-1} \end{aligned}$$

La formule de PASCAL s'écrit $\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k}$. Remplaçons dans la première somme $\binom{j-1}{k-1}$ par $\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
P[U_n = k] &= \sum_{j=1}^{n} \binom{j}{k} p^k\, q^{j-k} - \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k} p^k\, q^{j-k} - \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k} p^{k+1}\, q^{j-k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{j}{k} p^k\, q^{j-k} - \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k} p^k\, q^{j-k-1}\, (q+p) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{j}{k} p^k\, q^{j-k} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{k} p^k\, q^{j-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} - 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $P[U_n = k] = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$, ce qui prouve que $U_n \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$. ▲

Nb : ce dernier résultat pouvait être démontré beaucoup plus simplement, puisqu'à chaque instant il y a une panne avec la probabilité p et que les durée de vie sont mutuellement indépendates. Toutefois, la question précisait : "*En déduire*". Les points du barême sont donc attribués pour ce calcul !!