Révisions : analyse combinatoire et probabilités

1 Analyse combinatoire

1.1 Modèles usuels

Les modèles usuels doivent être parfaitement maîtrisés. Notons E_n un ensemble à n éléments. On peut ranger ces modèles canoniques dans le tableau suivant :

Nombre	Objets	Notation
n^p est le nombre de	• choix successifs avec remise de p éléments de E_n • listes à répétition de p éléments de E_n • applications de $\mathbb{F}_p$ dans E_n	$\left(E_n\right)^p$
A_n^p est le nombre de	• choix successifs sans remise de p éléments de E_n • listes de p éléments distincts de E_n • applications injectives de $\mathbb{F}_p$ dans E_n	$\mathscr{A}(p, E_n)$
$\binom{n}{p}$ est le nombre de	• choix simultanés sans remise de p éléments de E_n • listes strictement croissantes de p éléments de E_n • parties à p éléments de E_n	$\mathscr{C}(p, E_n)$
Γ_n^p est le nombre de	• combinaisons à répétition de p éléments de E_n • listes croissantes de p éléments de E_n • listes à n éléments qui vérifient $m_1 + \cdots + m_n = p$	$\mathscr{G}(p, E_n)$

Vous n'en avez certainement pas besoin, aussi est-ce par pur souci de complétude que je vous rappelle les formules suivantes :

Théorème.— Pour tous $(n, p) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned}
\textsf{Card } \left(E_n\right)^p &= n^p \\
\textsf{Card } \mathscr{A}(p, E_n) &= A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} && \text{si } 0 \leq p \leq n \\
\textsf{Card } \mathscr{C}(p, E_n) &= \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} && \text{si } 0 \leq p \leq n \\
\textsf{Card } \mathscr{G}(p, E_n) &= \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 1 : Un petit exercice pour se rappeler de la formule de Γ_n^p
Je cherche à calculer le nombre de suites $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ d'entiers telles que

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = p$$

Pour cela j'imagine la situation suivante : on souhaite ranger $p = 33$ livres indiscernables dans $n = 8$ compartiments d'une étagère.

Sur le schéma ci-dessus, les croix représentent les $n-1=7$ cloisons qui séparent les n compartiments, les autres colonnes représentent les emplacements pour les livres.

Remarquez que chaque rangement correspond de manière bijective[1] à une liste $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ d'entiers vérifiant la condition : $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = p$:
m_1 représente tout simplement le nombre de livres rangés dans la premier compartiment,
m_2 dans le deuxième, etc ….
de sorte que la condition exprime simplement le fait que les 33 livres ont bien été rangés !

Ainsi notre problème se ramène à dénombrer les rangements possibles. Pour cela, nous utilisons une astuce[2]. Plutôt que de ranger les livres, nous rangeons...**les cloisons ! !**

Vidons les étagères de tous livres et toutes cloisons : il y a $n-1+p$ emplacements libres. Il y a $\binom{n+p-1}{n-1}$ façons de placer les $n-1$ cloisons dans ces emplacements. D'où

$$\boxed{\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}}$$

▲

1.2 Techniques elémentaires

Pour aborder un exercice d'analyse combinatoire, vous pensez à

1. **tenter de reconnaître un des quatre modèles canoniques**. Posez-vous les questions simples suivantes :
   - *le tirage est-il ordonné ?*
   - *peut-il y avoir répétitions ?*

   A partir de ces deux questions, vous déterminez votre situation vis-a-vis des modèles canoniques. Lorsqu'aucun ne convient, il faut alors passer à l'étape suivante :
2. **utiliser les formules du dénombrement**
   - complémentaire
   - réunion disjointe
   - produit cartésien
   - réunion quelconque (formule de Poincaré pour le Card)
   - le principe des Bergers
   - les symétries éventuelles (**exple** DL2 "suites commençant par 2")
3. **décrire les étapes qui mènent à la construction d'un élément de l'ensemble à dénombrer**
   - je fais une discussion exclusive de cas et à la fin :

   $$\mathsf{Card}\ \{\text{tout}\} = \sum_{\text{différents cas}} \mathsf{Card}\ \{\text{cas possibles}\}$$

   - Les nombres de possibilités à chaque étape se multiplient, à condition que le nombre de cas possibles à chaque étape soit **indépendant** des résultats des étapes précédentes.

Exercice 2 : Combien de tirages avec au moins…
Nous avons rencontré plusieurs fois ce type de dénombrement : les cartes avec au moins un pique, les codes avec au moins un 7, *Chicago dancers* …l'ordre des tactiques à essayer est le suivant :

[1] on dit aussi bi-univoque
[2] KITU

1. dénombrer le complémentaire : c'est particulièrement utile pour les "*au moins un* " car le complémentaire est constitué des "*sans*" ...
2. discuter suivant la **valeur exacte** du nombre d'occurrences k
3. enfin, lorsque les tactiques précédentes ne permettent pas de simplifier le problème -voire le complique- il **faut** utiliser la **formule de Poincaré**, comme nous l'avons fait pour les *Chicago dancers.*

1.3 Exercices supplémentaires

Vous trouvez dans cette section quelques exercices supplémentaires que j'ai donné en colles. Pour plus de lisibilité, je les ai classé par thèmes. Régalez-vous !

$\boxed{\text{Propriétés des coefficients du binôme}}$

***Exercice* 3 :** Déterminez le terme maximum dans le développement de $(2+3)^{50}$ par la formule du binôme.

***Exercice* 4 :** Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $0 \le p \le k \le n$. Démontrez que

$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}.$$

En déduire

$$S_1 = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}; \quad \text{et } S_2 = \sum_{k=p}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

***Exercice* 5 :** Démontrez en utilisant la formule du binôme de Newton que pour tous entiers naturels n, p, k tels que $0 \le k \le \mathsf{min}\,\{n, p\}$,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \binom{n+p}{k}.$$

***Exercice* 6 :** Soient n et p des entiers tels que $0 \le p \le n$. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0.$$

***Exercice** 7 :**

1. Réduire la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

2. En développant $(k-nx)^2$, réduire la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}.$$

On utilisera -*après l'avoir justifiée*- l'égalité : $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$

$\boxed{\text{Dénombrements}}$

***Exercice* 8 :** Soit E un ensemble fini de cardinal n. Quel est le nombre de partitions de E en deux parties ? En trois parties ?

***Exercice* 9 :** Lors de la finale du 100m des mondiaux d'athlétismes huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont américains. Les trois premiers arrivés montent sur le podium dans leur ordre d'arrivée.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums cent pour cent américains ?
3. Combien y a-t-il de podiums comprenant au moins un américain ?
4. Combien y a-t-il de podiums comprenant exactement deux américains ?

***Exercice* 10 :** Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que

$$x + y + z = p \qquad \text{(où p est un entier naturel donné)}$$

1. Interprétez le problème posé en termes de p-combinaisons d'un ensemble à trois éléments.
2. Vérifiez le résultat en utilisant les 3-combinaisons à répétition.

***Exercice* 11 : des codes..** la dernière question a changé
A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres. Par exemple A 1998.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien y a-t-il de codes
   (a) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   (c) pour lesquels les quatres chiffres sont différents ?
   (d) pour lesquels les quatres chiffres sont **dans l'ordre croissant** ?

***Exercice* 12 :** Une grenouille monte un escalier de 13 marches. Elle ne peut progresser que par bonds de une ou deux marches. De combien de façons différentes peut-elle arriver au sommet de l'escalier ?

Attention ! *on veut que la grenouille arrive "pile" sur la treizième marche on remarquera qu'une progression de la grenouille est une suite de* 1 *et de* 2 *dont la somme vaut* 13

2 Probabilités finies

2.1 Résolution d'un exercice de probabilités

Les étapes de la résolution d'un exercice de probabilité peuvent se résumer ainsi :

1. **Description des résultats possibles** de l'expérience aléatoire (éventualités).
   Lors de cette étape cruciale, il faut essayer autant que possible de **simplifier cette description**, afin de se ramener à un modèle connu.
2. **Définition de l'univers des possibles Ω**
   Grâce à la description précédente, essayez de choisir un Ω canonique : $\big(E_n\big)^p$, $\mathscr{A}(p, E_n)$, $\mathscr{C}(p, E_n)$, $\mathscr{G}(p, E_n)$.

Exemple : Dans *Chicago dancers* un résultat possible est une application de choix de n femmes vers les n cavaliers, on prendra $\Omega = \mathscr{A}(\{femmes\}, \{cavaliers\})$, l'ensemble des bijections de l'ensemble des femmes vers l'ensemble des cavaliers.

Exemple : Lorsqu'on tire successivement avec remise deux paires de boules d'une urne U qui en contient n, on prend $\Omega = \big(\mathscr{C}(2, U)\big)^2$.

3. ***Choix* d'une probabilité sur Ω**
   En réalité, vous n'avez pas le choix, deux cas se présentent :

$\rightsquigarrow$ **il y a équiprobabilité des événements élémentaires**
Ω est muni de la proba U, et vous allez faire de l'analyse combinatoire !

$\rightsquigarrow$ **il n'y a pas équiprobabilité des événements élémentaires**
En ce cas, l'énoncé permet de définir (parfois partiellement seulement) la probabilité. En général, l'énoncé donne la probabilité de certains événements.

- *Identifiez les événements dont on connaît les probabilités en choisissant des notations adaptées ;*
- *Explicitez* ***en français*** *cet événement, puis :*
- *Traduisez-les en termes de parties de* Ω

Exemple : On connaît les probabilités d'un système complet d'événements (A_i). La probabilité est implicitement définie par la **formule des probabilités totales**. La réalisation d'un arbre est **strongly recommended** in that case !

$$\Omega$$

$$A_1 \qquad\qquad A_2 \qquad\qquad A_3 \qquad\qquad A_4$$

$$D \quad \bar{D} \qquad D \quad \bar{D} \qquad D \quad \bar{D} \qquad D \quad \bar{D}$$

La présentation horizontale de cet arbre n'a d'autre but que d'économiser la place ! Réalisez vos arbres comme d'habitude !

4. **Pour le calcul des probabilités** proprement dit, utilisez :
   (a) les **propriétés générales** des probabilités,
   (b) la **formule de Poincaré** pour les probabilités
   (c) les **probabilités conditionnelles** (quel que soit le modèle choisi)
   $\rightsquigarrow$ **Formule des probabilités totales**
   $\rightsquigarrow$ **Formule des probabilités composées**
   $\rightsquigarrow$ **Formules de Bayes**
   $\rightsquigarrow$ **Indépendance d'événements**

2.2 Exercices supplémentaires

Propriétés des probabilités

Exercice* 13 *: Soient A, B, C trois événements d'un même espace probabilisé fini $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$.

1. Exprimer en fonction de A, B, C les événements :
   - l'un au moins des trois événements se réalise
   - un et un seul des trois événements se réalise
   - deux au moins des trois événements se réalisent
   - deux exactement des trois événements se réalisent.
2. Montrer que si les événements A et $\bar{B} \cup C$ sont incompatibles, alors la réalisation de A entraîne celles de B et de $\bar{C}$.

Exercice* 14 *: On compose au hasard un numéro de téléphone à 10 chiffres commençant par 02. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A "*les 8 derniers chiffres sont tous distincts*"

B "*le produit des 8 derniers chiffres est divisible par 3*"

C "*les 8 derniers chiffres forment une suite strictement croissante*"

D "*les 8 derniers chiffres forment une suite monotone au sens large*"

Exercice* 15 *: Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$. On choisit au hasard deux parties A et B.

1. Quelle est la probabilité pour que ces parties soient disjointes ?
2. Quelle est la probabilité pour que ces parties recouvrent E

Exercice* 16 *: Ce matin la secrétaire a préparé son courrier (les fiches de salaire des profs)... Elle a préparé 50 enveloppes timbrées adressées à chacun des professeurs. Au moment décisif, elle met les fiches de salaires au hasard dans les enveloppes !
Quelle est la probabilité que l'un au moins des profs reçoive **sa** fiche de paie ?

Exercice* 17 *: Cette semaine nous élisons le délégué de classe. Il y a deux candidats A et B. A obtient a voix et c'est B qui est élu avec b voix. Le dépouillement se fait bulletin par bulletin. Quelle est la probabilité pour que B soit toujours en tête lors du dépouillement ?

Exercice* 18 *: Une urne contient 10 boules numérotées. On tire 3 fois de suite : on note le numéro obtenu et on remet la boule après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres rangés en ordre strictement croissant ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres rangés en ordre croissant au sens large ?

Exercice* 19 *: Un joueur lance 5 dés (à six faces) *non truqués*. Quelle la probabilité d'obtenir :

1. un double : deux dés portent le même numéro, les trois autres des numéros différents, à la fois entre eux mais aussi différents du premier.
2. deux doubles : deux dés portent un même numéro, deux autres portent un même autre numéro, et le dernier encore un autre numéro.
3. un triple : trois dés portent le même numéro, les deux autres portent des numéros différents à la fois entre eux mais aussi différents du premier.
4. un double et un triple de deux numéros différents.
5. un quintuplet : cinq numéros identiques !

***Exercice* 20 :** On considère le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{array} \right. .$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c on lance trois fois un dé à 6 faces parfaitement équilibré : le premier numéro sorti est a, le deuxième est b et le troisième donne la valeur de c.

1. Quelles sont les probabilités p_0, p_1, p_2 pour que le système ainsi obtenu possède respectivement : une infinité de solution, aucune solution, une unique solution ?
2. Quelle est la probabilité p_3 pour que le système admette pour unique solution le couple $(3; 0)$?

***Exercice* 21 :** Soit $n \in \mathbb{N}\star$. On considère n^2 boules numérotées de 1 à n^2. Calculer :

1. La probabilité d'avoir une et une seule boule dont le numéro soit un carré en tirant p boules simultanément ?
2. La probabilité d'avoir au moins une boule dont le numéro soit un carré en tirant p boules simultanément ?
3. La probabilité qu'en ayant tiré deux boules boules simultanément, la différence de leurs numéros soit un carré ?
   Indication : on pourra utiliser la formule $\sum_{k=0}^{n} k^2$

***Exercice* 22 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$. Quelle est la probabilité pour qu'au cours de ces n lancers, "face" ne soit "jamais suivi de "pile".

Probabilités conditionnelles

***Exercice* 23 :** Une urne contient cinq boules rouges et une boule noire. Déterminer la probabilité qu'il faille retirer trois boules successivement et sans remise afin d'obtenir la boule noire.

***Exercice* 24 :** On considère trois urnes U_1, U_2, U_3.

l'urne U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.

l'urne U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.

l'urne U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

On tire au hasard une boule dans U_1, une boule dans U_2 et on les met dans U_3. On tire une boule de U_3 : elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

***Exercice* 25 :** Deux bourses U et V contiennent des pièces d'or et des pièces d'argent. La composition de chacune est la suivante :

Bourse U	Bourse V
$2po$; $2pa$	$4po$; $1pa$

On tire de l'une des bourses, choisie au hasard une pièce et on la remet dans cette bourse.

si la pièce tirée est en or , on recommence dans la même bourse.

si la pièce tirée est en argent , on recommence, mais en piochant dans l'autre bourse.

Déterminer les probabilités pour que

1. Les trois premiers tirages soient faits dans la bourse U.
2. le deuxième tirage soit fait dans la bourse U.
3. au deuxième tirage, on tire une pièce d'argent.
4. le premier ait été fait dans la bourse U, sachant que l'on a tiré une pièce d'or au deuxièlme tirage.

***Exercice* 26 :** On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir"pile" soit de 1/3.

- si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dé A
- si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup.
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^\star$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A..

***Exercice* 27 :** Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges :

Classe 1 moins de 25 ans

Classe 2 de 25 ans a 50 ans

Classe 3 plus de 50 ans

Le tableau ci-dessous fournit deux informations :

1. La proportion d'assurés appartenant à chaque classe
2. La probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée déclare au moins un accident au cours de l'année.

Classe	proportion	probabilité
1	0,25	0,12
2	0,53	0,06
3	0,22	0,09

1. Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?
2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident au cours de l'année soit agé d'au plus 25 ans ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré agé de 25 ans ou plus ait au moins un accident au cours de l'année ?
4. Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident appartienne à la classe 2 ?