

PROGRAMME DE COLLES S1 : QUESTIONS DE COURS

NB : Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilées doivent être sues

ENSEMBLES

Opérations élémentaires dans $\mathcal{P}(E)$

Définition : Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit

1. $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$, la **réunion** de A et B .
2. $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$, l'**intersection** de A et B .
3. $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$, le **complémentaire** de A dans E .
4. $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$, la **différence** de A et B .

Propriétés des opérations élémentaires

Proposition.— DISTRIBUTIVITÉ

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E .

1. L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition*.— CARACTÉRISATION DU COMPLÉMENTAIRE

Soient A et B des parties d'un ensemble E ,

$$B = \complement_E A \text{ si et seulement si } A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

Proposition*.— PROPRIÉTÉS DU PASSAGE AU COMPLÉMENTAIRE

Soient A, B deux parties d'un ensemble E , alors :

1. $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.
2. $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.
3. si $A \subset B$, alors $\complement_E B \subset \complement_E A$.

APPLICATIONS

Injectivité, surjectivité

Définition : Soit $f : E \rightarrow F$ une application. f est dite :

1. **injective** si pour tout couple (x, x') de $E \times E$, la relation $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$.
2. **surjective** si pour tout élément y de F , il existe au moins un élément x de E tel que $y = f(x)$.

Proposition*.— Soit $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Proposition*.— Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Bijektivité

Définition : Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective.

Théorème.— Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est bijective ssi pour tout $y \in F$, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$
ssi il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que
 $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

Définition : Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection, l'application $g : F \rightarrow E$ donnée par le **Théorème** ci-dessus s'appelle l'**application réciproque** de f . On la note f^{-1} . elle vérifie

$$\text{pour tout } (x,y) \in E \times F, \quad y = f(x) \text{ ssi } x = f^{-1}(y).$$

Image directe, image réciproque d'une partie

Définition : Soient $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$, $B \subset F$, on définit :

i. l'**image directe** de A par f comme le sous-ensemble de F :

$$f(A) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in A, \text{ tel que } y = f(x)\}$$

ii. l'**image réciproque** de B par f , comme le sous-ensemble de E :

$$\bar{f}^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$