Programme de colles S9

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilés doivent être sues*

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

Théorème.— Notation algébrique d'un nombre complexe
Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ il existe un couple de nombres **réels** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **unique**, tel que

$$\boxed{z = x + iy}$$

Le nombre réel x est appelé la **partie réelle** de z et noté $\mathfrak{Re}\, z$, y est appelé la **partie imaginaire** de z et noté $\mathfrak{Im}\, z$. L'unicité de la notation algébrique se traduit par :

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \left(z = z' \iff \begin{array}{c} \mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z' \\ \mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, z' \end{array} \right)}$$

Proposition⋆.— Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Alors

$$\boxed{\mathbf{1.}\quad \mathfrak{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad\qquad \mathbf{2.}\quad \mathfrak{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

Illustration.— le plan complexe, interprétation géométrique de l'addition des nombres complexes.

Notation exponentielle des nombres complexes non nuls

Proposition-définition.— Module d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, Le nombre $z\bar{z}$ est un nombre réel positif. On appelle module de z, et on note $|z|$ le nombre réel posistif :

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\mathfrak{Re}\, z^2 + \mathfrak{Im}\, z^2}}$$

Proposition⋆.— Propriétés du module

Nombres complexes de module 1

Théorème.— Représentation de nombres complexes de module 1

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ l'application définie par $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta}$

L'application φ ainsi définie est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{U}$. En accord avec les propriétés de φ, on note pour tout nombre réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \varphi(\theta)$

Théorème⋆.— Règles de calculs pour l'application φ

1. $e^{i0} = 1$.
2. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
4. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

Théorème*.— Formules d'Euler Pour tout nombre réel $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Théorème*.— Formule de Moivre Pour tout nombre réel $\theta \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \text{et} \quad \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

Exercice* : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ **1.** Linéarisez $\sin^3\theta$ **2.** Ecrivez $\cos 4\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$.

Proposition.— Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ un nombre complexe non nul. Il **existe** un couple de réels $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta} = \rho\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)}$$

Il n'y a **pas unicité** de l'écriture exponentielle : pour tous (ρ,θ) , $(\rho',\theta') \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$,

$$\boxed{\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \iff \left\{\begin{array}{ccc} \rho & = & \rho' \\ \theta' & \equiv & \theta'[2\pi] \end{array}\right. .}$$

Remarque : Si $z \in \mathbb{C}^\star$, s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, nécéssairement $\rho = |z|$. On appelle **un argument** de z, et on note $\operatorname{arg}(z)$ tout nombre réel tel que $z = |z|e^{i\ \operatorname{arg}(z)}$.

Corollaire.— La partie *semi*-unicité de l'écriture exponentielle se traduit par

$$\boxed{\big(\forall (z,z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star\big),\ \left((z=z') \iff \left\{\begin{array}{ccc} |z| & = & |z'| \\ \operatorname{arg}(z) & \equiv & \operatorname{arg}(z')\,[2\pi] \end{array}\right.\right)}$$

Illustration.— Interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes.

Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Théorème*.— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Notons $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des **racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité** est :

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{\omega^k;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}}$$

Illustration.— Représentation des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Proposition*.— Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n \geq 2}$. Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$

Théorème*.— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{C}^\star$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des racines $n^{\text{ièmes}}$ de a est donné par :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\,\frac{\operatorname{arg} a}{n}},\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\,\frac{\operatorname{arg} a + 2\pi}{n}},\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\,\frac{\operatorname{arg} a + 4\pi}{n}}, \ldots,\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\,\frac{\operatorname{arg} a + 2(n-1)\pi}{n}}\ \right\}}$$

Savoir-faire.— calcul des racines carrées en notation algébrique

Exercice* : Calculez les racines carrées de $a = 3 - 4i$.

Equations polynômiales de degré 2

Savoir-faire.— résolution des équations polynômiales de degré 2

Exercice* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2Z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$