Programme de colles S11

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilés doivent être sues*

Opérations algébriques et degré

Proposition.— Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors
$$d^\circ(P+Q) \leq \max\{d^\circ\ P, d^\circ\ Q\}$$
Si de plus $d^\circ P \neq d^\circ Q$, alors $d^\circ(P+Q) = \max\{d^\circ\ P, d^\circ\ Q\}$

Proposition.— Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors
$$d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$$

Proposition.— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ un scalaire non nul. Alors
$$d^\circ\big(\lambda P\big) = d^\circ P$$

Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition : *Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle **polynôme dérivé** de P, le polynôme défini par* $P' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k$

Définition : *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les **dérivées successives** de P sont définies par récurrence par* $P^{(0)} = P$ *et* $\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = \Big(P^{(k)}\Big)'$.

Proposition*.— Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme de coefficients $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ dans $\mathbb{K}$ de degré n. Alors

- Si $p > n$ $P^{(p)} = 0$.
- Si $p \in [\![0,n]\!]$, $\quad P^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\ k(k-1)\dots(k-p+1)\ X^{k-p} = \sum_{k=p}^{n} a_k\ \frac{k!}{(k-p)!}\ X^{k-p}$

Théorème.— Formule de Taylor pour les polynômes
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors

$$\boxed{P = P(\alpha) + P'(\alpha)\ (X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}\ (X-\alpha)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}\ (X-\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k}$$

Théorème.— Formule de Taylor - Mac Laurin pour les polynômes

Proposition*.— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors pour tout $n+1$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$,
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-\alpha)^k \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$$

Divisibilté dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème.— THÉORÈME DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose que $B \neq 0$.

$$\boxed{\textbf{Il existe un couple } (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2, \textbf{unique tel que } \left\{ \begin{array}{l} A = B \times Q + R \\ d^\circ R < d^\circ B \end{array} \right.}$$

Exercice * **:** Montrez que $X^5 + X^4 - 9X^3 - 7X^2 + 9X - 1$ est divisible par $X^3 - 8X + 1$.

Corollaire*.— Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $B \neq 0$.
B divise A *si et seulement si* le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

RACINES D'UN POLYNÔME

Définition : *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ un nombre réel ou complexe. On dit que α est* ***racine*** *de P, ou bien que α est un* ***zéro*** *de P si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.*

Théorème*.— Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$ un nombre réel ou complexe.
α est un zéro de P *si et seulement si* $(X - \alpha)$ divise P

Proposition-Définition.—Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
α est racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^\star$ de P $\iff$ $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} P = (X-\alpha)^k \times Q \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$

Théorème*.— Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, $\alpha \in \mathbb{K}$ un nombre réel ou complexe, et $k \in \mathbb{N}^\star$.
α est racine d'ordre k de P *si et seulement si* $\left\{ \begin{array}{c} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$

FACTORISATION DES POLYNÔMES

Théorème.— THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE
Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ **non constant** admet (au moins) une racine.

Théorème.— Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^\star$
si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines distinctes de P de multiplicités respectives $r_1, \ldots, r_p$, alors

$$\boxed{P = a_n\ (X-\alpha_1)^{r_1} \times \cdots (X-\alpha_p)^{r_p} \qquad \text{où} \quad \sum\nolimits_{k=1}^{p} r_k = n}$$

Proposition*.— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$

α est racine d'odre k de P *si et seulement si* $\bar{\alpha}$ est racine d'odre k de P

Théorème.— Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^\star$ à coefficients réels
Plus précisément si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines **réelles** distinctes de P de multiplicités respectives $r_1, \ldots, r_p$, alors

$$\boxed{P = a_n \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)^{r_k} \prod_{j=1}^{q} \left(X^2 - \beta_j X + \gamma_j\right)^{s_j} \quad \text{où} \quad \sum_{k=1}^{p} r_k + 2 \times \sum_{j=1}^{q} s_j = n,}$$

et les polynômes à coefficients réels $\left(X^2 - \beta_j X + \gamma_j\right)$ ne possèdent pas de racines réelles $(\Delta < 0)$.

Exercice * **:** Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^5 - 1$.