Programme de colles S13

NB : *Le programme de cette semaine reprend celui de la semaine 12,* ***plus*** *ce qui suit :*

Exemples de suites

Suites de références

Théorème.— Soient $(a, b, \alpha, \alpha', \beta, \beta') \in \mathbb{R}^6$ tels que $1 < a < b$, $0 < \alpha < \alpha'$ et $0 < \beta < \beta'$.

1. La suite $(\sqrt[n]{a})$ est convergente de limite 1.
2. La suite $\left((\ln n)^\beta\right)_{n\geq 1}$ est divergente vers $+\infty$.
3. La suite (n^α) est divergente vers $+\infty$.
4. La suite (a^n) est divergente vers $+\infty$.
5. La suite $(n!)$ est divergente vers $+\infty$.
6. La suite (n^n) est divergente vers $+\infty$.

De plus,

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{(\ln n)^{\alpha'}} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n^{\alpha'}} = 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{b^n} = 0$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

Suites récurrentes

Suites géométriques, arithmétiques et arithmético-géométriques

Théorème.— Soient $a \in \mathbb{R}^\star$ et $q \in \mathbb{R}$ fixés.

Une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ est convergente *si et seulement si* $|q| < 1$ ou $q = 1$.

Précisez ...

Théorème.— Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $b \neq 0$
Soit u la suite de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ définie par la relation de récurrence

$$\boxed{u_{n+1} = au_n + b}$$

Soit r la solution de l'équation $r = ar + b$. La suite $v = u - r$ est géométrique de raison a.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème.— Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$ et u une suite de nombres *réels* définie par la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$$

Notons Δ le discriminant de l'**équation caractéristique** : $r^2 - ar - b = 0$.

- Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, notées r_1, r_2.
$$\exists\,!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
- Si $\Delta = 0$: l'éq. caractéristique possède une racine réelle double, notée r_0
$$\exists\,!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_0^n + n\,\mu r_0^n$$
- Si $\Delta < 0$: l'éq. car. possède deux racines complexes conjuguées distinctes, notées $r = \rho e^{\pm i\theta}$
$$\exists\,!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$$

Suites récurrentes $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$

Théorème.— Soit $f : I \to I$ une fonction *continue* et u la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite u est convergente ou divergente vers $\pm\infty$, sa limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$ est une solution dans $\bar{\mathbb{R}}$ de l'équation :

$$\boxed{f(x) = x}$$

Théorème.— Soit $f : I \to I$ une application définie et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. On étudie la monotonie d'une suite u définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, en fonction de la monotonie de f.

1. Si f est croissante sur I alors u est monotone.
2. Si f est décroissante sur I alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones : l'une est croissante et l'autre décroissante.