Programme de colles S15

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions ne sont pas exigibles*

Limites de fonctions

Propriétés fondamentales

Définition : *Soient I un intervalle non trivial, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ $a \in \overset{\circ}{I}$. On dit que f possède une* ***limite à gauche (resp. à droite)*** *au point a si la restriction de f à $J = I \cap]-\infty, a[$ (resp. $J = I \cap]a, +\infty[$) possède une limite en a.*

Proposition.— Soient I un intervalle non trivial, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point *à l'intérieur* de I. Alors f admet une limite au point a *ssi* f admet $f(a)$ comme limite à gauche et à droite en a.

Théorème.— Caractérisation séquentielle de la limite
Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell\right) \iff (\forall u \in I^{\mathbb{N}}), \left(\lim_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell\right)}$$

Proposition.— Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que f et g possèdent des limites au point a.

1. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, **alors** $f < g$ dans un voisinage de a.
2. **Si** $f \leq g$ au voisinage de a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Théorèmes d'existence de limites

- ⇝ par opérations algébriques (valeur absolue, multiplication, produit, quotient)
- ⇝ par composition (changement de variable)
- ⇝ par encadrement ou comparaison (limite finie, limite nulle, limite infinie)
- ⇝ cas des fonctions monotones (limites aux bornes de l'intervalle, à l'*intérieur* de l'intervalle)

Limites des fonctions usuelles

Théorème.— Limites des fonctions trigonométriques

$$\boxed{\begin{array}{rll} \forall a \in \mathbb{R}, & \lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a & \lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a \\ \forall a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a, & \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty & \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty. \end{array}}$$

Théorème.— Limites des fonctions exponentielle et logarithme népérien

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \exp(x) = \exp(a)$	**2.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$	**3.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$
1. $\forall a \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\lim\limits_{x\to a} \ln x = \ln a$	**2.** $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$	**3.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

Théorème.— Limites de la fonction puissance $\alpha \in \mathbb{R}^\star$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\forall a \in \mathbb{R}^{+\star}),\ \lim_{x\to a} x^\alpha = a^\alpha. \\ \text{Si } \alpha > 0, \text{ alors } \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty. \\ \text{Si } \alpha < 0, \text{ alors } \lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0. \end{array}}$$

Comparaison locale des fonctions

Définitions

Proposition-définition — Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que g ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$. Alors

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f = o_a(g) & \iff & \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0. \\ f \sim_a (g) & \iff & \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1. \end{array}}$$

Règles de calculs pour les équivalents

Théorème.— Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. On suppose que $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$. Alors

1. $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$.
2. si de plus $g_1 \neq 0$ et $g_2 \neq 0$ dans $I \setminus \{a\}$, alors $\dfrac{f_1}{g_1} \sim_a \dfrac{f_2}{g_2}$
3. si de plus $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$ dans $I \setminus \{a\}$, alors $f_1^\alpha \sim_a f_2^\alpha$.
4. soit $h \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, telle que $h(J) \subset I$. Alors$\lim_{y\to b} h(y) = a \ \Rightarrow\ f_1 \circ h \sim_b f_2 \circ h$.
5. $(\forall h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}))\,, \quad (f_1 = o_a(h) \Rightarrow f_2 = o_a(h))$

Théorème.— Soient $f, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\boxed{\textbf{Si } h = o_a(f), \textbf{ alors } f + h \sim_a f.}$$

Proposition.— Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. **On suppose qu'au voisinage de** a**,** f_1 **et** g_1 **sont strictement positives**. Alors :

$$\textbf{Si } f_1 \sim_a f_2 \text{ et } g_1 \sim_a g_2, \textbf{ alors } f_1 + g_1 \sim_a f_2 + g_2.$$

Comparaison de fonctions usuelles

Théorème.— Comparaison des fonctions usuelles
Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$ tels que $\alpha < \beta$, et $a > 1$, alors

Au voisinage de 0	**Au voisinage de $+\infty$**
$(\ln x)^\gamma = o_0(1/x^\alpha)$.	$(\ln x)^\gamma = o_{+\infty}(x^\alpha)$
$x^\beta = o_0(x^\alpha)$	$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$
	$x^\alpha = o_{+\infty}(a^x)$

Théorème.— **Au voisinage de** 0, nous disposons des équivalents suivants :

• $\sin x \sim x$	• $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	• $\tan x \sim x$
• $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	• $\ln(1+x) \sim x$	• $e^x - 1 \sim x$