# Programme de colles S15

**Nb :** *Les exercices sur les limites de fonctions,comparaisons équivalents. Les questions de cours porteront le programme S14 plus ce qui suit.* ☺ *:*

## Propriétés fondamentales des fonctions continues

### Continuité en un point

**Définition :** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle, $a \in I$. Que signifie :*
- *$f$ est continue au point $a$*
- *$f$ est continue à gauche, à droite au point $a$*

**Théorème.—** Quelle relation fondamentale entre continuité à gauche, continuité à droite et continuité au point $a$.

**Vocabulaire :** Quand dit-on que $f$ présente une discontinuité de première ou deuxième espèce au point $a$ ? donnez des exemples !

**Théorème.—** Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. On suppose que $f$ et $g$ sont continues au point $a$.

**Si** $f(a) < g(a)$, **alors** il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $a$ dans $I$ tel que $\forall x \in \mathcal{V},\ f(x) < g(x)$

**Théorème.—** Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

$f$ est continue en $a$ *si et seulement si* $\left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}\right), \left(\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)\right).$

**Application :** Soit $f : I \to I$ une fonction **continue** sur $I$ et $u$ la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite $u$ est convergente, sa limite $\ell \in \bar{I}$ est une solution dans $\bar{\mathbb{R}}$ de l'équation :

$$\boxed{f(x) = x}$$

### Continuité globale

**Théorème.—** Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ deux fonctions réelles continues sur $I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel et $h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ une fonction continue sur $J$. On suppose que $f(I) \subset J$.

1. Si $f$ est continue sur $I$, alors $|f|$ est continue sur $I$ .
2. Si $f$ est continue sur $I$, alors $\lambda f$ est continue sur $I$ .
3. Si $f$ est continue sur $I$ et $f \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $I$.
4. Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $f + g$ est continue sur $I$.
5. Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $f \times g$ est continue sur $I$.
6. La fonction composée $h \circ f$ est continue sur $I$.

**Proposition.—** Soient $I$ un intervalle (non trivial) de $\mathbb{R}$, $J$ un sous-intervalle non trivial de $I$ [1] et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ une fonction continue sur $I$.

La restriction $f|_J$ de $f$ à $J$ est une fonction continue sur $J$.

[1] i.e. $J \subset I$

**Proposition.—** Prolongement par continuité

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle ouvert, borné $I = ]a, b[$. $f$ est **prolongeable par continuité** au point $a$ (resp. au point $b$) si :

$$(\exists \ell \in \mathbb{R}), \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell. \qquad \text{resp. } (\exists \ell' \in \mathbb{R}), \ \lim_{x \to b^-} f(x) = \ell'.$$

## Les Théorèmes fondamentaux

**Théorème.—** Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$, $f$ atteint toute valeur $\gamma$ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\Big(\forall (a, b) \in I^2, \ \forall \gamma \in \mathbb{R}\Big), \quad \Big(\gamma \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \ \exists\, c \in I, \quad f(c) = \gamma.\Big)}$$

**Savoir-faire :** Etant données deux fonctions $f$ et $g$ définies et continues sur un intervalle $I$. Comment utiliser le TVI pour démontrer l'**existence** d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, ou plus généralement, $f(x) = g(x)$.

***Exercice***$^\star$ **:** Théorème de point fixe

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$, et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrez que $f$ possède au moins un point fixe dans $[a, b]$.

**Théorème.—** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes. Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que

$$\boxed{\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).}$$

***Exercice***$^\star$ **:** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
Montrez que $f$ est bornée.

**Théorème.—** Théorème de la bijection

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une application **continue et strictement monotone** sur $I$. Alors

1. $J = f(I)$ est un intervalle,
2. $f : I \to J$ est une bijection de $I$ sur $J$,
3. l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que $f$.
4. $f^{-1} : J \to I$ est continue de $J$ sur $I$.

**Savoir-faire :** Etant donnée une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle $I$, comment utiliser le théorème de la bijection pour :

1. déterminer l'ensemble $J$ des images ?
2. en déduire alors le tableau de variation de l'application réciproque $g : J \to I$ ? les limites aux bornes de l'intervalle $J$ ?
3. Démontrer l'**existence et l'unicité** d'une solution de l'équation $f(x) = c$ ?

***Exercice***$^\star$ **:** Soit $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la fonction rationnelle définie par $\forall x \in [1, +\infty[, \ f(x) = \dfrac{2\,x^2}{1+x}$.

1. Démontrez que $f$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[)$.
2. En utilisant le Théorème de la bijection, explicitez $J = f([1, +\infty[)$.
3. Soit $g : J \to [1, +\infty[$ l'application réciproque de $f$. Dressez le tableau de variation de $g$ en précisant les limites de $g$ aux bornes de $J$.
4. Etudiez la limite $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire un équivalent de $g$ au voisinage de $+\infty$.