Programme de colles S17

Nb : *Le programme de cette semaine porte sur celui de la semaine précédente **PLUS** ce qui suit*

Systèmes d'équations linéaires

Généralités sur les systèmes d'équations linéaires

Théorème.— Un système (S) de n équations linéaires à p inconnues possède

- **ou bien** une infinité de solutions – on dit que (S) est **indéterminé** ;
- **ou bien** aucune solution – on dit que (S) est **incompatible** ;
- **ou bien** une unique solution – on dit que (S) est de **Cramer** .

Définition : *Deux systèmes (S_1) et (S_2) sonts dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Proposition.— On obtient un système équivalent à (S) lorsqu 'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- **échanger l'ordre des lignes** L_i et L_j $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- **multiplier la ligne** L_i **par une constante non nulle** $\lambda_i \in \mathbb{K}^\star$ $(L_i \leftarrow \lambda_i\ L_i)$,
- **ajouter à la ligne** L_i **un multiple d'une autre ligne** L_j $(i \neq j)$ $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Systèmes triangulaires

Théorème.— Soit (T) un système triangulaire de n équations à n inconnues. Alors

(T) possède une unique solution
si et seulement si
tous les coefficients diagonaux de (T) sont non nuls.

Savoir-faire : résolution d'un système triangulaire par remontée.

***Exercice**** **:** Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système triangulaire suivant :

$$(T)\quad \begin{cases} 5x - 3y & = 6 \\ \quad\ - y + 2z + t & = 8 \\ \qquad\quad - z - t & = 1 \\ \qquad\qquad\quad 2t & = 4 \end{cases}$$

Systèmes échelonnés

Théorème.— Soit (E) un système échelonné. Alors

(E) est compatible
si et seulement si
chacune des $n-r$ équations auxiliaires est vérifiée.

Dans ce cas, (E) possède :

- une unique solution, si et seulement si $r = p$
- une infinité de solutions si et seulement si $r < p$.

$$(E)\quad \left\{ \begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & \rceil \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & \mid \text{r éqs} \\ \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & & \vdots & \mid \text{pples} \\ a_{r,r}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p & = & b_r & \rfloor \\ & & & \\ 0 & = & b_{r+1} & \rceil\, n-r \\ \vdots & & \vdots & \mid \text{ éqs} \\ 0 & = & b_n & \rfloor \text{ aux.} \end{array} \right.$$

Méthode d'élimination de Gauss

Théorème.— Tout système d'équations linéaires ayant au moins un coefficient non nul est équivalent à un système échelonné.

Savoir-faire : la méthode d'élimination de Gauss

Exercice*** **: Echelonnez le système :

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 & (L_1) \\ x + 3y + z = 11 & (L_2) \\ 2x + 5y - 4z = 13 & (L_3) \\ 4x + 11y = 37 & (L_4) \end{cases}$$

Systèmes de Cramer

Théorème.— Cramer *via* Gauss
Soit (S) un système de n équations à n inconnues.

(S) est de Cramer *ssi* l'algorithme de résolution de Gauss fait apparaître n pivots non nuls

Théorème.— Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues. **Les ASSE :**

1. (S) possède une unique solution, c'est-à-dire (S) est de Cramer.
2. (S_o) possède une unique solution.
3. Pour tout second membre b, le système (S_b) possède une unique solution.
4. Pour tout second membre b, le système (S_b) possède au moins une solution.
5. Pour tout second membre b, le système (S_b) possède au plus une solution.

Exercice*** **: Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. En discutant suivant les valeurs de (a,b,c,d) , résoudre les systèmes

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y - 3z = a \\ x + 3y = b \\ -x + 2y + 6z = c \end{cases} \qquad (S_2) \quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} \qquad (S_3) \quad \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$