Programme de colles S1-S2

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilées doivent être sues*

Ensembles

Opérations élémentaires dans $\mathscr{P}(E)$

Définition : *Soient E un ensemble, $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on définit*

1. $A \cup B = \{x \in E |\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$, *la **réunion** de A et B.*
2. $A \cap B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \in B\}$, *l'**intersection** de A et B.*
3. $\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$, *le **complémentaire** de A dans E.*
4. $A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$, *la **différence** de A et B.*

Propriétés des opérations élémentaires

Proposition.— Distributivité
Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

1. L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition*.— Caractérisation du complémentaire
Soient A et B des parties d'un ensemble E,

$$B = \complement_E A \text{ si et seulement si } A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

Proposition*.— Propriétés du passage au complémentaire
Soient A, B deux parties d'un ensemble E, alors :

1. $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.
2. $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.

Fonctions indicatrices

Proposition.— Soit E un ensemble, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ des parties de E. Alors

$$\begin{array}{rclrcl} \mathbb{1}_{A\cap B} & = & \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, & \mathbb{1}_{\complement A} & = & 1 - \mathbb{1}_A, \\ \mathbb{1}_{A\setminus B} & = & \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, & \mathbb{1}_{A\cup B} & = & \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B. \end{array}$$

Applications

Injectivité, surjectivité

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application. f est dite :*

1. ***injective** si pour tout couple (x, x') de $E \times E$, la relation $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$.*
2. ***surjective** si pour tout élément y de F, il existe au moins un élément x de E tel que $y = f(x)$.*

Proposition*.— Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Proposition*.— Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Bijectivité

Définition : *Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.*

Théorème.— Soit $f : E \to F$ une application.

$$\begin{array}{lll} f \text{ est bijective} & \text{ssi} & \text{pour tout } y \in F, \text{ il existe un unique élément } x \in E \text{ tel que } y = f(x) \\ & \text{ssi} & \text{il existe une application } g : F \to G \text{ telle que} \\ & & \qquad f \circ g = Id_F \text{ et } g \circ f = Id_E. \end{array}$$

Définition : *Soit $f : E \to F$ une bijection, l'application $g : F \to E$ donnée par le* **Théorème** *ci-dessus s'appelle l'**application réciproque** de f. On la note f^{-1}. elle vérifie*

$$\boxed{\textit{pour tout } (x,y) \in E \times F, \qquad y = f(x) \textit{ ssi } x = f^{-1}(y).}$$

Image directe, image réciproque d'une partie

Définition : *Soient $f : E \to F$ une application, $A \subset E$, $B \subset F$, on définit :*
*i. l'**image directe** de A par f comme le sous-ensemble de F :*

$$f(A) = \{y \in F \mid \textit{il existe } x \in A, \textit{tel que } y = f(x)\}$$

*ii. l'**image réciproque** de B par f, comme le sous-ensemble de E :*

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

$$\boxed{\text{EQUATIONS}}$$

Proposition.— Soient $f : E \to F$ une application, $A \in PP(E)$, $B \in PP(F)$ telles que $f(A) \subset B$. On considère pour $y \in B$ l'équation :

$$f(x) = y \tag{1}$$

- $f_{A,B}$ est **injective** *ssi* pour tout $y \in B$, l'équation (1) possède **au plus une solution** dans A.
- $f_{A,B}$ est **surjective** *ssi* pour tout $y \in B$, l'équation (1) possède **au moins une solution** dans A.
- $f_{A,B}$ est **surjective** *ssi* pour tout $y \in B$, l'équation (1) possède **exactement une solution** dans A.