Programme de colles S19

NB : *Les solutions des exercices étoilés doivent être bien connues*

Convergence des séries

Définition : *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ est dite* **convergente** *si la suite des sommes partielles (U_n) l'est. En ce cas, on note* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice * ***:*** **Convergence de la série harmonique altérnée**
Considérons la série dite **Série harmonique alternée** $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, S_n la somme partielle de rang n de cette série. Montrez que la série harmonique alternée converge.

Savoir-faire : utiliser un télescopage pour calculer les sommes partiielles.

Exercice * ***:*** Montrez que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(n+1)}$ converge et calculez sa somme.

Définition-proposition.— Restes d'une série convergente

Théorème.— Opérations algébriques sur les séries convergentes

Conditions nécessaires et/ou suffisantes de convergence

Théorème.— CN de convergence des séries .— Soit $\sum u_n$ une série numérique.

$$\boxed{\textbf{Si } \sum u_n \text{ converge } \textbf{alors } u_n \text{ est convergente de limite nulle}}$$

Question : la réciproque est-elle vraie ? Quand dit-t-on qu'une série est **grossièrement divergente** ?

Exercice * ***:*** Divergence de la série harmonique.— Considérons la série dite **Série harmonique** définie par $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, S_n la somme partielle de rang n de cette série.
Prouvez pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ l'inégalité : $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ et déduisez-en que la série harmonique est divergente. Est-elle grossièrement divergente ?

Théorème.— CNS de convergence des séries à termes positifs.— Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note (U_n) la suite des sommes partielles :

$$\boxed{\sum u_n \text{ est convergente } \textit{ si et seulement si } (U_n) \text{ est majorée.}}$$

Théorème.— Comparaison des séries à termes positifs .— Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ deux suites réelles à termes positifs. On suppose de plus que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et
- Si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Théorème.— Règle des équivalents .— Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$ Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice * **:** Soit $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Montrez que $u_n \sim \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Définition : *On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème.— Condition suffisante de convergence .—

$$\boxed{\textbf{Si } \sum u_n \text{ est absolument convergente } \textbf{alors } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

Réciproque ?

Exercice * **:** Etudiez la nature de la série de terme général $\dfrac{(2\cos\sqrt{n}\pi)^n}{2^n + (-1)^n \ln n}$.

Séries de référence

Théorème.— Séries géométriques & dérivées.— Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, alors

la série $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^{n-p}$ est convergente *si et seulement si* $|x| < 1$

Dans ce cas,cette série est absolument convergente et sa somme est

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

Théorème.— Convergence des séries de Riemann.— Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel donné.

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge *si et seulement si* $x > 1$

Proposition.— Règle $n^\alpha u_n$.— Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha\, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, **alors** $\sum u_n$ converge.

Théorème.— Séries exponentielles.— Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Exercice * **:**

- Nature **et** somme des séries de termes généraux $u_n = \dfrac{n^2}{3^n}$ et $v_n = \dfrac{n^2\, 2^n}{n!}$.
- Nature de la série de terme général $w_n = \left(n^3\, e^{-\sqrt{n}}\right)$.