Programme de colles S26

NB : *Le programme porte sur celui de la semaine S25 PLUS ce qui suit...*

Algèbre linéaire en dimension finie

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème de la base incomplète et conséquences

Définition : *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de* ***dimension finie*** *s'il possède une famille génératrice finie.*

Théorème.— Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\vec{0}\}$ de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soient $\mathscr{L}$ une famille **libre** et finie de vecteurs de E et $\mathscr{G}$ une famille **génératrice** et finie de vecteurs de E. On suppose que $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de vecteurs de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$$

Conséquences :

- Toute famille libre finie $\mathscr{L}$ de vecteurs de E peut être complétée en une base de E.
- De toute famille génératrice finie $\mathscr{G}$ de E, on peut extraire une base.
- En particulier tout espace de dimension finie possède des bases.

Théorème de la dimension

Théorème.— Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\vec{0}\}$ de type fini sur $\mathbb{K}$. Alors

Toutes les bases de E ont même cardinal.

Cet entier est appelé la **dimension de** E.

Théorème.— Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors

E est de dimension finie n *si et seulement si* E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Sous-espaces vectoriels

Théorème.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$. De plus $F = E$ *si et seulement si* $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$.

Théorème.— Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Alors F, G,$F \cap G$ et $F + G$ sont de dimensions finies et

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) + \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$$

Théorème.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors$F$ possède un supplémentaire G dans E. De plus

$$\dim_{\mathbb{K}} G = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} F$$

Familles de vecteurs

Rang d'un famille de vecteurs

Définition : *Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Le* ***rang de*** *$\mathscr{F}$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$. On note* $\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathscr{F})$.

Proposition.— Soit $\mathscr{F}$ une famille de $\boldsymbol{p}$ vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Alors

$$\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} \leq n \text{ et } \mathsf{Rg}\,\mathscr{F} \leq \mathsf{Card}\ \ p.$$

Théorème.— Soit $\mathscr{F}$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$. Alors

$\mathscr{F}$ est génératrice de E	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = n$.
$\mathscr{F}$ est libre dans E	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = p$.
$\mathscr{F}$ est une base de E	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = n = p$.

Application linéaires

Formule du rang et conséquences

Théorème.— Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\mathsf{Ker}\, u$ et $\mathsf{Im}\, u$ sont des espaces de dimension finie et

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} E = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}\, u + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}\, u$$

Théorème.— Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de type fini et de **même dimension**. Pour toute application linéaire $u \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective.}$$

Rang d'une application linéaire

Définition : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. On appelle **rang de** u, et on note $\mathsf{Rg}\, u$, la dimension de $\mathsf{Im}\, u$.*

Proposition.— Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors

$$\mathsf{Rg}\, u \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} E \text{ et } \mathsf{Rg}\, u \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} F.$$

Théorème.— Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies n et p, et $u \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors

$$\begin{array}{lll} u \text{ est injective} & \textit{si et seulement si} & \mathsf{Rg}\, u = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} E. \\ u \text{ est surjective} & \textit{si et seulement si} & \mathsf{Rg}\, u = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} F. \\ u \text{ est un isomorphisme} & \textit{si et seulement si} & \mathsf{Rg}\, u = n = p. \end{array}$$

Applications linéaires et matrices

Définition : *Les colonnes de la **matrice représentative d'une application linéaire dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$** sont les coordonnées –dans la base $\mathscr{F}$– des images des vecteurs de la base $\mathscr{E}$.*

Savoir-faire : construire la matrice représentative d'une amppication linéaire dans des bases.

Théorème.— Soient E_p, F_n ,G_m trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $A \in L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$, $b \in L_{\mathbb{K}}(F_n, G_m)$ deux applications linéaires. Etant données $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des bases de E_p, F_n et G_m respectivement, les matrices représentatives de a, b et $a \circ b$ vérifient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(a \circ b) & = & \mathbf{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(a) \times \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(b) \\ \forall \vec{x} \in E_p, \quad \mathbf{Mat}_{\mathscr{F}}(b(\vec{x})) & = & \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(b) \times \mathbf{Mat}_{\mathscr{E}}(\vec{x}) \end{array}$$

Savoir-faire : calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire grâce à leurs matrices représentatives dans des bases.

Théorème.— Soient E_n et F_n deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de même dimension n, et $u : E_n \to F_n$ une application linéaire.

$$u \in GL_{\mathbb{K}}(E, F) \textit{ ssi } \text{il existe } \mathscr{E} \text{ et } \mathscr{F} \text{ des bases de } E_n \text{ et } F_n \text{ telles que } \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) \in GL_n(\mathbb{K}).$$

En ce cas $\mathbf{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{E}}(u^{-1}) = \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)^{-1}$.