Programme de colles S27

Algèbre linéaire en dimension finie (suite)

E_p, E_n et F_n désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies repectives p, n et n.

Familles de vecteurs

Représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Définition : *Soit $\mathscr{A}=\{\vec a_1;\dots;\vec a_p\}$ une famille de p vecteurs de E_n.*
On définit la matrice $\mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, représentative de la famille $\mathscr{A}$ dans la base $\mathscr{E}$ par :

$$\text{Si}\quad \begin{array}{rcl} \vec a_1 &=& a_{1,1}\cdot\vec e_1+\dots+a_{n,1}\cdot\vec e_n \\ \vec a_2 &=& a_{1,2}\cdot\vec e_1+\dots+a_{n,2}\cdot\vec e_n \\ \vdots && \\ \vec a_1 &=& a_{1,p}\cdot\vec e_1+\dots+a_{n,p}\cdot\vec e_n. \end{array} \qquad \text{alors}\quad \mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A}) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(\vec a_1) & \mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(\vec a_2) & & \mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(\vec a_p) \\ \swarrow & \swarrow & & \swarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Rang d'une famille de vecteurs

Définition : *Soit $\mathscr{A}$ une famille de vecteurs de E_n. Le* ***rang de*** *$\mathscr{A}$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{A}$. On note $\mathsf{Rg}\,\mathscr{A}=\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathscr{A})$.*

Proposition.— Soit $\mathscr{A}$ une famille de $\boldsymbol{p}$ vecteurs de E_n. Alors $\mathsf{Rg}\,\mathscr{A}\le\max\{n,p\}$.

Théorème.— Soit $\mathscr{A}$ une famille de p vecteurs de E_n. Alors

$\mathscr{A}$ est génératrice de E_n	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\,\mathscr{A}=n$.
$\mathscr{A}$ est libre dans E_n	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\,\mathscr{A}=p$.
$\mathscr{A}$ est une base de E_n	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\,\mathscr{A}=n=p$.

Conséquences :
- une famille libre et maximale (de cardinal n) est une base de E_n.
- une famille génératrice et miniimale (de cardinal n) est une base de E_n.

Calcul pratique

Théorème.— Soit $\mathscr{E}=\{\vec e_1,\dots,\vec e_n\}$ une base de E_n. On considère une famille finie $\mathscr{A}=\{\vec a_1;\dots;\vec a_p\}$ de vecteurs de E_n. Alors $\mathsf{Rg}\,(\mathscr{A})=\mathsf{Rg}\,\mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{A}))$.

Savoir-faire : calculer le rang de la matrice...

Applications linéaires

Représentation matricielle des applications linéaires

Définition : *La* ***matrice représentative de*** *a dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ est la matrice représentative de la famille $\{a(\vec e_1),\,a(\vec e_2),\dots,a(\vec e_p)\}$ dans la base $\mathscr{F}$.*
Elle est donc définie par

$$\text{Si}\quad \begin{array}{rcl} a(\vec e_1) &=& a_{1,1}\cdot\vec f_1+a_{2,1}\cdot\vec f_2+\dots+a_{n,1}\cdot\vec f_n \\ a(\vec e_2) &=& a_{1,2}\cdot\vec f_1+a_{2,2}\cdot\vec f_2+\dots+a_{n,2}\cdot\vec f_n \\ \vdots && \\ a(\vec e_p) &=& a_{1,p}\cdot\vec f_1+a_{2,p}\cdot\vec f_2+\dots+a_{n,p}\cdot\vec f_n \end{array} \qquad \text{alors}\quad \mathsf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(a) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(a(\vec e_1)) & \mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(a(\vec e_2)) & & \mathsf{Mat}_{\mathscr{E}}(a(\vec e_p)) \\ \swarrow & \swarrow & & \swarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème.— Soient E_p, F_n ,G_m trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $a \in L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$, $b \in L_{\mathbb{K}}(F_n, G_m)$ deux applications linéaires. Etant données $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des bases de E_p, F_n et G_m respectivement, les matrices représentatives de a, b et $a \circ b$ vérifient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(b \circ a) & = & \mathbf{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(b) \times \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(a) \\ \forall \vec{x} \in E_p, \quad \mathbf{Mat}_{\mathscr{F}}(a(\vec{x})) & = & \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(a) \times \mathbf{Mat}_{\mathscr{E}}(\vec{x}) \end{array}$$

Savoir-faire : déterminer image et noyau d'une application linéaire représentée par une matrice.

Théorème.— Soient E_n et F_n deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de même dimension n, et $u : E_n \to F_n$ une application linéaire.

$$u \in GL_{\mathbb{K}}(E, F) \textit{ ssi } \text{il existe } \mathscr{E} \text{ et } \mathscr{F} \text{ des bases de } E_n \text{ et } F_n \text{ telles que } \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) \in GL_n(\mathbb{K}).$$

En ce cas $\mathbf{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{E}}(u^{-1}) = \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)^{-1}$.

Rang d'une application linéaire

Définition : *Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$. On appelle **rang de** u, et on note $\mathsf{Rg}\, u$, la dimension de $\mathsf{Im}\, u$.*

Proposition.— Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$. Alors $\mathsf{Rg}\, u \leq \min\{n, ,\ p\}$.

Théorème.— Formule du rang
Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$. Alors $\mathsf{Ker}\, u$ et $\mathsf{Im}\, u$ sont des espaces de dimension finie et

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} E = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}\, u + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}\, u = \mathsf{Rg}\, u + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}\, u.$$

Théorème.— Soit $u \in L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$. Alors

$$\begin{array}{lll} u \text{ est injective} & \textit{si et seulement si} & \mathsf{Rg}\, u = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} E. \\ u \text{ est surjective} & \textit{si et seulement si} & \mathsf{Rg}\, u = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} F. \\ u \text{ est un isomorphisme} & \textit{si et seulement si} & \mathsf{Rg}\, u = n = p. \end{array}$$

En particulier si E et F **même dimension** ($n = p$) et $u \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective}.$$

Calcul pratique

Théorème.— Soit $a \in L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$ une application linéaire, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des bases de E_p et F_n. Notons $\vec{a}_1 = a(\vec{e}_1)$,…, $\vec{a}_p = a(\vec{e}_p)$. Alors

$$\boxed{\mathsf{Rg}\, a = \mathsf{Rg}\, \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\} = \mathsf{Rg}\, \mathbf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(a)}$$

Savoir-faire : calcul du rang d'une matrice

Rang d'une matrice

Proposition.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on :

- échange deux lignes (resp. deux colonnes) de A ;
- remplace une ligne (resp. colonne) de A par un multiple - non nul- de cette ligne(resp. colonne)
- ajoute à une ligne (resp. colonne) un multilple d'une autre ligne (resp. colonne).

Théorème.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée i.e. il existe r, $1 \leq r \leq p$ et $1 \leq r \leq n$ tel que A se présente sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \boxed{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,r} & \cdots & a_{2,p} \\ & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \boxed{a_{r,r}} & \cdots & a_{r,p} \\ \vdots & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & \boxed{a_{r,r}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,r} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients diagonaux $\boxed{a_{i,i}}$ pour $1 \leq i \leq r$ sont **non nuls**.Alors $\mathsf{Rg}\, A = r$.