Programme de colles S3-S4

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilés doivent être sues*

Stratégies de démonstration

une stratégie de démonstration est un énoncé équivalent à l'énoncé proposé.

Stratégies pour une implication

Définition : *Soient E un ensemble, P et Q des propriétés des éléments de E. On leur associe les parties A et B de E définies par :*

$$A = \{x \in E | P(x) \text{ vraie}\} \text{ et } B = \{x \in E | Q(x) \text{ vraie}\}$$

On dit que P implique Q, et on note $P \Rightarrow Q$ si $A \subset B$, c'est-à-dire lorsque tout élément de E qui vérifie P vérifie aussi Q. Cette assertion s'écrit :

$$(\forall x \in E), \ \Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big)$$

Proposition*.— Soit E un ensemble, P et Q des propriétés des éléments de E. Alors

$$\big(P \Rightarrow Q\big) \iff \big(Non(Q) \Rightarrow Non(P)\big) \iff \big(P \text{ et } Non(Q)\big) \text{ est faux} \iff \big(Non(P) \text{ ou } Q\big).$$

Ainsi, les énoncés $\boxed{P \Rightarrow Q}$ $\boxed{Non(Q) \Rightarrow Non(P)}$ $\boxed{\big(P \text{ et } Non(Q)\big) \text{ est faux}}$ sont équivalents.

Comment appelle-t-on les stratégies associées ?

Démonstration par récurrence

Théorème.— Théorème de la récurrence
Soient P une propriété des entiers naturels, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

$$\boxed{\big(\forall n \geq n_0\big), \ P(n)} \iff \boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad P(n_0) \\ \bullet \ \big(\forall n \geq n_0\big), \ \big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big) \end{array}}$$

Exercice* :

1. Montrez que pour tout entier naturel n, $11^{n+1} + 10 \times 4^n$ est divisible par 7.
2. Montrez que $\forall n \geq 2, \ \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, \ n = 2a + 3b$.
3. Soit u_n la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrez que $(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_n = 3^n - 2^n$.

Calculs de sommes

Associativité, commutativité et distributivité

Proposition***.—** Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Alors pour tout couple $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ d'entiers tels que $0 \leq n < m$,

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(x_y + y_k\big) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(\lambda \cdot x_k\big) = \lambda \times \sum_{k=0}^{n} x_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{m} x_k$

Changement d'indices

Proposition***.—** Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$,une suite de nombres réels et l. Alors pour tout triplet $(n,p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ d'entiers tels que $p \leq q$,

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{i=0}^{n} x_{n-i}$
2. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} x_k = \sum_{i=0}^{q-p} x_{p+i}.$

Exercice* ***:*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\times(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Exercice* ***:*** Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$