Programme de colles S30

Développements limités et formules de Taylor

Polynômes de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On appelle* **polynôme de Taylor** *de f en a de degré inférieur ou égal à n, le polynôme T_n défini par :*

$$\boxed{T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.}$$

Formules de Taylor

Théorème.— Formule de Taylor avec reste intégrale
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a, b]$. Alors

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

Remarque : lorsque $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, i.e. $n = 0$,il s'agit du **Théorème 24.17** : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$.
Savoir-faire : utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale pour obtenir des encadrements du reste :

Exercice * ***:*** Démontrez à l'aide la formule de Taylor avec reste intégrale que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Théorème.— Formule de Taylor-Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a, b]$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}}$$

Remarque : lorsque $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, i.e. $n = 0$, c'est l'égalité des accroissements finis $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.
Corollaire.— Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [a, b],\ \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$. Alors

$$\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \right| \leq M\ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Exercice * ***:*** Utilisez l'inégalité de Taylor-Lagrange pour démontrer que pour tout nombre réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme $\exp x$.

Théorème.— Formule de Taylor-Young
Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)}$$

Remarque : lorsque $n = 1$, c'est la caractérisation de la dérivabilité en a à l'aide des d. l. à l'ordre 1 : $f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + o(x-a)$.

Développements limités

Définition : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un* ***développement limité à l'ordre*** *n en un point $a \in I$ s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que*

$$(DL_n f(a)) \qquad \boxed{f(x) = P(x-a) + o_a\big((x-a)^n\big)}$$

Savoir-faire : le changement de variable $x = a + t$ permet de se ramener au voisinage de 0.

Théorème.— Développement de Taylor-Young
Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au point a :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)}$$

Exercice*** **: Déterminez un développement limité à l'ordre 3 le la fonction Arctan au voisinage de 0.

Théorème.— Développements limités des fonctions usuelles
Au voisinage de l'**origine**, les fonctions usuelles admettent des développements limités de tous ordres :

$$\begin{array}{|rrcl|}
\hline
 & e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 & \cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \cdots (-1)^n\,\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 & \sin x & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\alpha \in \mathbb{R}, & (1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha\,x + \alpha\,(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 & \ln(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\dfrac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\hline
\end{array}$$

Théorème.— Opérations sur les développements limités

Si f et g admettent des DL d'ordre n à l'**origine** $\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & P(x) + o\big(x^n\big) \\ g(x) & = & Q(x) + o\big(x^n\big) \end{array}\right.$ Alors

- $f + g)(x) = (P + Q)(x) + o\big(x^n\big)$
- $(f \times g)(x) = R(x) + o\big(x^n\big)$, où $R \in \mathbb{R}_n[X]$ est le polynôme $P \times Q$ *tronqué* à l'ordre n.
- si de plus $\boldsymbol{f(0) = 0}$, $(g \circ f)(x) = R(x) + o\big(x^n\big)$, où $R \in \mathbb{R}_n[X]$ est le polynôme $Q \circ P$ *tronqué* à l'ordre n.

Savoir-faire : la mise en œuvre de ces opérations ne s'improvise pas ! vous devez vous entrainer !

Applications des développements limités

⇝ au calcul des limites, et à la recherche d'équivalents de fonctions
⇝ à l'étude locale des fonctions : continuité, dérivabilité
⇝ à la recherche de tangentes, à l'étude des positions relatives du graphe et d'une tangente
⇝ à l'étude des branches infinies des fonctions au moyen d'un développement limité au voisinage de $\pm\infty$

Exercice*** **:

1. Etudiez la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$. Montrez que f se prolonge par continuité au point 1. Ce prolongement est-il dérivable au point 1 ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Déterminez le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente Δ à Γ_f en 0 ainsi que les positions relatives de Γ_f et Δ au voisinage de 0.
4. Soit $f : \mathbb{R}^\star \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}^\star \setminus \{1\}, \quad f(x) = (x+1)\,e^{1/x}$.
   (a) Déterminez un développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{2x} + o\big(\dfrac{1}{x}\big)$.
   (b) En déduire que la courbe représentative Γ_f de f admet une asymptote Δ en $+\infty$. Déterminez l'équation de Δ ainsi que les positions relatives de Γ_f et de Δ.