Programme de colles S4

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilés doivent être sues*

Démonstration par récurrence

Théorème.— Théorème de la récurrence
Soient P une propriété des entiers naturels, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

$$\boxed{\big(\forall n \geq n_0\big),\ P(n)} \iff \boxed{\begin{array}{l} \bullet \quad P(n_0) \\ \bullet\ \big(\forall n \geq n_0\big),\ \big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big) \end{array}}$$

Exemple*.—
1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $1 + \cdots + n = (1/2)\ n(n+1)$.
2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-1}$ est infiniment dérivable, et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ sa dérivée $n^{ième}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels supérieurs ou égaux à 1 ,

$$2^{n-1}(a_1 \times \cdots \times a_n + 1) \geq (a_1 + 1) \times \cdots \times (a_n + 1).$$

Calculs de sommes

Proposition*.— Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \times (n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}.$$

Proposition*.— $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k.b^{n-k}$. En particulier, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}.$$

Dénombrements

Définition : *Soit E un ensemble. On dit que E est* ***fini*** *s'il est en bijection avec un intervalle d'entiers $\mathbb{F}_n$. L'entier n, s'il existe est unique. On l'appelle le* **cardinal** de E. *On note* Card $E = n$.

Théorème.— Soient E et F des ensembles finis, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ des parties de E. Alors

1. Si E et F sont disjoints, $E \cup F$ est fini et $\mathsf{Card}\ (E \cup F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F$.
2. $\mathsf{Card}\ (E \cup F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F - \mathsf{Card}\ (E \cap F)$.
3. $\mathsf{Card}\ (E \setminus A) = \mathsf{Card}\ E - \mathsf{Card}\ A$
4. $\mathsf{Card}\ (B \setminus A) = \mathsf{Card}\ B - \mathsf{Card}\ (A \cap B)$
5. $E \times F$ est fini et $\mathsf{Card}\ (F^E) = (\mathsf{Card}\ F)^{\mathsf{Card}\ E}$.
6. L'ensemble F^E des applications de E vers F est fini et $\mathsf{Card}\ (F^E) = (\mathsf{Card}\ F)^{\mathsf{Card}\ E}$.
7. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et $\mathsf{Card}\ \big(\mathscr{P}(E)\big) = 2^n$.

COMMENTAIRES :*Les démonstrations ne sont pas exigées, mais quelques* indications *de démonstration seraient les bienvenus ...*

Proposition.— THÉORÈME DES BERGERS
Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application surjective de E sur F. On suppose que $(\exists p \in \mathbb{N}^\star)$ $(\forall y \in F)$, $\mathsf{Card}\ \big(\overset{-1}{f}(\{y\})\big) = p$. Alors

$$\mathsf{Card}\ E = p\ \mathsf{Card}\ F.$$

Proposition.— FORMULE DU CRIBLE OU FORMULE DE POINCARÉ
Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de parties d'un ensemble E, alors

$$\mathsf{Card}\ \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathsf{Card}\ \big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)$$

PROPRIÉTÉS DES COEFFICIENTS DU BINÔME

Définition : *Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$. On appelle* ***combinaison*** *de p éléments de E_n toute partie de E_n de cardinal p. Le nombre de combinaisons de p éléments dans E_n est noté* $\dbinom{n}{p}$.

Théorème.— Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n$. Alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

Théorème*.— Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq p \leq n$, les coefficients du binôme vérifient

$$\text{ⓐ}\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \text{ⓑ}\binom{n+1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \times \binom{n}{p} \qquad \text{ⓒ}\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Savoir-faire*.— Construction du **triangle de Pascal**.

Théorème.— FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

Corollaire*.— Les $\binom{n}{p}$ vérifient les relations suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \text{et si } n \geq 1\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$