Programme de colles S5

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilés doivent être sues*

Ensembles finis

Définition : *Soit E un ensemble. On dit que E est **fini** s'il est en bijection avec un intervalle d'entiers $\mathbb{F}_n$. L'entier n, s'il existe est unique. On l'appelle le **cardinal** de E. On note Card $E = n$.*

Théorème.— Soit E un ensemble fini et $A \in \mathscr{P}(E)$ une partie de E. Alors

1. A est un ensemble fini et $\mathsf{Card}\ A \leq \mathsf{Card}\ E$,
2. $A = E$ si et seulement si $\mathsf{Card}\ A = \mathsf{Card}\ E$.

Corollaire⋆.— Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble **fini** F.

1. L'ensemble *image* $f(E)$ est fini et $\mathsf{Card}\ f(E) \leq \mathsf{Card}\ F$.
2. $\mathsf{Card}\ f(E) = \mathsf{Card}\ F$ *si et seulement si* f est surjective.

Corollaire.— Soit f une application d'un ensemble **fini** E vers un ensemble F.

1. L'ensemble *image* $f(E)$ est fini et $\mathsf{Card}\ f(E) \leq \mathsf{Card}\ E$.
2. $\mathsf{Card}\ f(E) = \mathsf{Card}\ E$ *si et seulement si* f est injective.

Théorème⋆.— Soient E et F deux ensembles **finis** tels que $\mathsf{Card}\ \mathbf{E} = \mathsf{Card}\ \mathbf{F}$ et $f : E \to F$ une application. Alors, les assertions suivantes sont **équivalentes**

$$\boxed{f \text{ est injective } \textit{ssi } f \text{ est surjective } \textit{ssi } f \text{ est bijective.}}$$

Dénombrements

Théorème.— Soient E et F des ensembles finis, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ des parties de E. Alors

1. Si E et F sont disjoints, $E \cup F$ est fini et $\mathsf{Card}\ (E \cup F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F$.
2. $\mathsf{Card}\ (E \cup F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F - \mathsf{Card}\ (E \cap F)$.
3. $\mathsf{Card}\ (E \setminus A) = \mathsf{Card}\ E - \mathsf{Card}\ A$
4. $\mathsf{Card}\ (B \setminus A) = \mathsf{Card}\ B - \mathsf{Card}\ (A \cap B)$
5. $E \times F$ est fini et $\mathsf{Card}\ (F^E) = (\mathsf{Card}\ F)^{\mathsf{Card}\ E}$.
6. L'ensemble F^E des applications de E vers F est fini et $\mathsf{Card}\ (F^E) = (\mathsf{Card}\ F)^{\mathsf{Card}\ E}$.
7. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et $\mathsf{Card}\ \big(\mathscr{P}(E)\big) = 2^n$.

Commentaires :*Les démonstrations ne sont pas exigées, mais quelques* indications *de démonstration a l'aide d'un schéma par exemple seraient les bienvenus ...*

Théorème.— Théorème des bergers
Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application surjective de E sur F. On suppose que $(\exists p \in \mathbb{N}^\star)$ $(\forall y \in F)$, $\mathsf{Card}\ \big(\overset{-1}{f}(\{y\})\big) = p$. Alors

$$\boxed{\mathsf{Card}\ E = p\ \mathsf{Card}\ F}$$

Savoir-faire : utiliser le théorème des Bergers pour dénombrer E et pour dénombrer F.

Théorème.— Formule du crible ou formule de Poincaré
Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de parties d'un ensemble E, alors

$$\boxed{\mathsf{Card}\ \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathsf{Card}\ \big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)}$$

Analyse combinatoire

Les modèles usuels doivent être parfaitement maîtrisés. Notons E_n un ensemble à n éléments. On peut ranger ces modèles canoniques dans le tableau suivant :

Nombre	Objets	Notation
n^p est le nombre de	• tirages successifs avec remise de p éléments de E_n • listes à répétition de p éléments de E_n • applications de $\mathbb{F}_p$ dans E_n	$(E_n)^p$
A_n^p est le nombre de	• tirages successifs sans remise de p éléments de E_n • listes de p éléments distincts de E_n • applications injectives de $\mathbb{F}_p$ dans E_n	$\mathscr{A}(p, E_n)$
$\binom{n}{p}$ est le nombre de	• tirages simultanés sans remise de p éléments de E_n • listes strictement croissantes de p éléments de E_n • parties à p éléments de E_n	$\mathscr{C}(p, E_n)$

Théorème*.— Pour tous $(n,p) \in \mathbb{N}^2$

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \text{Card } (E_n)^p & = & n^p & \\ \text{Card } \mathscr{A}(p, E_n) & = & A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.} \\ \text{Card } \mathscr{C}(p, E_n) & = & \dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.} \end{array}}$$

Exemple.— $\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n.$

Propriétés des coefficients du binôme

Théorème*.— Pour tous $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \times \binom{n}{p}}$$

$$\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}}$$

Savoir-faire*.— Construction du **triangle de Pascal**.

Théorème.— Formule du binôme de Newton

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}}$$

Corollaire*.— Les $\binom{n}{p}$ vérifient les relations suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \text{et si } n \geq 1 \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$