Programme de colles S6

NB : *Le programme de colle porte sur celui de la semaine précédente : ensembles finis, dénombrement, analyse combinatoire, propiétés des coefficients du binôme* ***plus*** *ce qui suit :*

Espaces probabilisés finis

Définition : *Soit Ω un ensemble fini, non vide. On appelle* ***probabilité*** *sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie :*

$\mathbb{p}_1$	$P(\Omega) = 1$, *et*
$\mathbb{p}_2$	*Si A et B sont des événements* ***incompatibles*** *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Théorème*.— Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini. Pour tous événements A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$, les assertions suivantes sont vraies :

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	2. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Théorème.— Formule de Poincaré pour les probabilités finies
Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega, P\big)$ un espace probabilisé fini, $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une **famille finie quelconque** d'événements. Alors :

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)}$$

En particulier, **si** les événements (A_i) sont **deux à deux incompatibles** nous obtenons :

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

Théorème.— Soient $\Omega = \{w_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$, et $(p_1, \ldots, p_n)$ un p-uplet de nombres réels positifs.

Il existe une probabilité P telle que pour tout $i \in [[1,n]]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$. *ssi* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Exercice* : Une urne contient n boules numérotées : $\mathcal{U} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. On effectue un tirage d'une boule dans cette urne. On note le numéro de la boule obtenue. Montrez qu'il existe une unique probabilité P telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la probabilité de tirer la boule b_k soit proportionnelle à $2k-1$.

Proposition*.— Le cas d'équiprobabilité dans la **Théorème** précédent.

Probabilités conditionnelles

Définition : *Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $B \subset \Omega$ un événement non négligeable*[1]*. Pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit la* ***probabilité conditionnelle de A sachant B*** *par :*

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Proposition*.— Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $B \subset \Omega$ un événement non négligeable. L'application $P_B : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui à tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe $P_B(A)$ définie comme ci-dessus, est une probabilité sur Ω.

[1]i.e. $P(B) > 0$

Corollaire.— Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé. Pour tous événements A et B tels que $P(B) > 0$,

$$\boxed{P(A\cap B) = P(B)\times P_B(A)}$$

Proposition.— Formule des probabilités composées
Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\boxed{P\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) = P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times\cdots\times P(A_n\,|\,A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})}$$

***Exercice** :** On dispose de trois urnes contenant des boules blanches et noires. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 boules noires, $\mathcal{U}_2$ contient 4 boules blanches et 2 boules noires enfin l'urne $\mathcal{U}_3$ contient 6 boules blanches et 1 boule noire. On effectue trois tirages successifs la boule tirée dans une urne étant remise dans la suivante.
Quelle est la probabilité pour que les trois boules tirées soient de la même couleur ?

Proposition*.— Formule des probabilités totales
Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements non négligeables.
Pour tout événement $B\in\mathscr{P}(\Omega)$,

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\times P_{A_i}(B)}$$

Proposition*.— Formule de Bayes
Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements non négligeables.
Pour tout événement B non négligeable, et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$,

$$\boxed{P(A_j\,|\,B) = \frac{P(A_j)\times P(B\,|\,A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\times P(B\,|\,A_i)}}$$

Indépendance en probabilité

Définition : *Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé. Deux événements A et B sont dits **indépendants pour la probabilité** P si*

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\times P(B)}$$

Proposition*.— Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et A, B deux événements.
Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Définition : *Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $(A_1,\ldots,A_n)\in\mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements. On dit que les événements sont **mutuellement indépendants** si : ...*

Proposition.— Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé et $(A_1,\ldots,A_n)\in\mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**.
Toute *sous-famille* $(A_{i_1},\ldots,A_{i_k})$ $(k\leq n)$ est formée d'événements **mutuellement indépendants**.