Programme de colles S7

NB : *Le programme de colle porte sur les espaces probabilisés finis (S6), plus ce qui suit :*

L'ensemble des nombres réels

Théorème.— Propriété de la borne supérieure, dans $\mathbb{R}$ et dans $\bar{\mathbb{R}}$
Toute partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$.
Plus précisément

- si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = \ldots$
- si A est une partie non vide et non majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = \ldots$
- si A est la partie vide de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = \ldots$!

Proposition⋆.— Inégalités triangulaires
Pour tous nombres réels x et y,

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|}$$

Définition : *Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle* ***partie entière*** *de x l'entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, défini par $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} |\ n \leq x\}$. C'est l'unique entier vérifiant l'encadrement :*

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

Proposition.— La partie entière vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}).$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{Z}), \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$
5. $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad (x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor).$

Fonctions monotones

Définition : *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite*

1. ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) sur I si ...*
2. ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) sur I si ...*

Proposition⋆.— Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ alors

1. f est strictement croissante *si et seulement si* f est croissante et injective.
2. f est strictement décroissante *si et seulement si* f est décroissante et injective.

Proposition⋆.— Opérations sur les fonctions monotones
Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ deux applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ un réel positif.

1. Si f et g sont croissantes alors $f + g$ est croissante.
2. Si f est croissante alors λf est croissante.
3. Si f est croissante, alors $-f$ est décroissante.
4. Si f et g sont croissantes et positives, alors $f \times g$ est croissante.
5. Si f et g sont décroissantes et positives, alors $f \times g$ est décroissante.

Proposition⋆.— Composition des fonctions monotones
Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ deux applications telles que $f(I) \subset J$,

1. Si f et g sont croissantes, alors $g \circ f$ est croissante.
2. Si f et g sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante.
3. Si f est croissante, g est décroissante, alors $g \circ f$ est décroissante.

4. Si f est décroissante, g est croissante, alors $g \circ f$ est décroissante.

Fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions **logarithme népérien**, **exponentielle**, **puissance d'exposant** α, **sinus** , **cosinus** et **tangente** , sont exigés

- les graphes ;
- les propriétés de monotonie ;
- les propriétés d'injectivité, surjectivité, bijectivité (de ces fonctions ou de leurs restrictions à des intervalles appropriés) ;
- les propriétés de symétries (parité, périodicité et autres ...) ;
- ainsi que les règles de calcul rappelées ci-dessous.

Théorème.— Règles de calcul pour le logarithme

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}, \quad \boxed{\ln(x \times y) = \ln x + \ln y}$$

On en déduit, pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$, de réels strictement positifs

1. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ln x^\alpha = \alpha \ln x$

Théorème.— Règles de calculs pour les exponentielles

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{\exp(x+y) = \exp x \times \exp y}$$

On en déduit, pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de réels

1. $\exp 0 = 1$ et $\exp 1 = e$
2. $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$
3. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (\exp x)^\alpha = \exp(\alpha x)$

Théorème.— Règles de calculs pour les fonctions puissances
Pour tous nombres réels non nuls α, β, pour tous nombres réels strictement positifs x et y, on a :

1. $x^\alpha = \exp\big(\alpha \times \ln x)\big)$
2. $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
3. $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
3. $\big(x^\alpha\big)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$
4. $x^\alpha \times y^\alpha = \big(x \times y\big)^\alpha$
5. $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \big(\dfrac{x}{y}\big)^\alpha$

Proposition.— Règles de calculs pour les fonctions trigonométriques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

formules d'addition

1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
2. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
3. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
4. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

formules de duplication

1. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
   $= 1 - 2\sin^2 a$
   $= 2\cos^2 a - 1$
2. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$