Programme de colles S8

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilés doivent être sues*

L'ensemble des nombres réels

Théorème.— Propriété de la borne supérieure, dans $\mathbb{R}$ et dans $\bar{\mathbb{R}}$
Toute partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$.
Plus précisément
- si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = \dots$
- si A est une partie non vide et non majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = \dots$
- si A est la partie vide de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = \dots$!

Proposition*.— Inégalités triangulaires
Pour tous nombres réels x et y,

$$\boxed{\begin{array}{lcl} |x+y| & \leq & |x|+|y|. \\ |x-y| & \geq & \big||x|-|y|\big|. \end{array}}$$

Définition : *Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle* ***partie entière*** *de x l'entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, unique tel que :*

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

Proposition.— Propriétés de la partie entière d'un réel
La partie entière vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}).$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{Z}), \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$
5. $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad (x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor).$

Proposition.— Développement décimal des nombres réels
Tout nombre réel x peut être représenté par une suite $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ tels que $a_0 \in \mathbb{Z}$, et pour tout $k \geq 1$, $a_k \in [\![0, 9]\!]$ de la façon suivante :

$$\boxed{x = a_0 + 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots}$$

Nota bene : La démonstration n'est pas demandée, mais vous pourrez indiquer comment on construit ce développement à partir des approximations décimales.

Remarque : Un nombre q est rationnel *si et seulement si* la suite de ses décimales est périodique (à partir d'un certain rang).

Définition : *une partie C du plan est dite* ***convexe*** *si*

$$(\forall (M_1, M_2) \in P^2)\big((M_1, M_2) \in C^2 \Rightarrow [M_1, M_2] \subset C\big).$$

Notation : *Dans la définition ci-dessus le* segment $[M_1, M_2]$ *est le sous-ensemble du plan $\mathcal{P}$ formé des points M qui vérifient :*

$$\boxed{M(x,y) \in [M_1, M_2] \textit{ ssi } \exists t \in [0,1] \textit{ tel que } \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & tx_2 + (1-t)x_1 \\ y & = & ty_2 + (1-t)y_1 \end{array} \right.}$$

Exercice*⋆*** **:** Soit $\mathcal{C}$ la partie du plan définie par :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid |x| \leq 1,\ \text{et } |y| \leq 1\}$$

Démontrez que $\mathcal{C}$ est une partie convexe du plan.

Fonctions monotones

Définition : *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite*

1. ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) sur I si ...*
2. ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) sur I si ...*

Proposition⋆.— Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ alors

1. f est strictement croissante *si et seulement si* f est croissante et injective.
2. f est strictement décroissante *si et seulement si* f est décroissante et injective.

Proposition⋆.— Opérations sur les fonctions monotones
Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ deux applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ un réel positif.

1. Si f et g sont croissantes alors $f + g$ est croissante.
2. Si f est croissante alors λf est croissante.
3. Si f est croissante, alors $-f$ est décroissante.
4. Si f et g sont croissantes et positives, alors $f \times g$ est croissante.
5. Si f et g sont décroissantes et positives, alors $f \times g$ est décroissante.

Proposition⋆.— Composition des fonctions monotones
Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ deux applications telles que $f(I) \subset J$,

1. Si f et g sont croissantes, alors $g \circ f$ est croissante.
2. Si f et g sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante.
3. Si f est croissante, g est décroissante, alors $g \circ f$ est décroissante.
4. Si f est décroissante, g est croissante, alors $g \circ f$ est décroissante.

Premières fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions **logarithme de base** a, **exponentielle de base** a, **puissance d'exposant** α, **sinus** , **cosinus** et **tangente** , sont demandés

- les graphes ;
- les propriétés de monotonie ;
- les propriétés d'injectivité, surjectivité, bijectivité (de ces fonctions ou de leurs restrictions à des intervalles) ;
- les propriétés de symétries (parité, périodicité et autres ...) ;
- les règles de calculs.

Pour les **fonctions trigonométriques**, les seules règles de calculs demandées sont les formules d'addition et de duplication. On illustrera les propriétés de symétrie de ces fonctions sur le cercle trigonométrique.