Programme de colles S9

NB : *Les démonstrations des théorèmes ou propositions étoilés doivent être sues*

Premières fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions **logarithme de base** a, **exponentielle de base** a, **puissance d'exposant** α, **sinus** , **cosinus** et **tangente** , sont demandés
- les graphes ;
- les propriétés de monotonie ;
- les propriétés d'injectivité, surjectivité, bijectivité (de ces fonctions ou de leurs restrictions à des intervalles) ;
- les propriétés de symétries (parité, périodicité et autres ...) ;
- les règles de calculs.

Pour les **fonctions trigonométriques**, les seules règles de calculs demandées sont les formules d'addition et de duplication. On illustrera les propriétés de symétrie de ces fonctions sur le cercle trigonométrique.

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

Théorème.— Notation algébrique d'un nombre complexe
Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ il existe un couple de nombres **réels** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **unique**, tel que

$$\boxed{z = x + iy}$$

Le nombre réel x est appelé la **partie réelle** de z et noté $\mathfrak{Re}\, z$.
Le nombre réel y est appelé la **partie imaginaire** de z est noté $\mathfrak{Im}\, z$.
L'unicité de la notation algébrique se traduit par :

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \left(z = z' \iff \begin{array}{c} \mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z' \\ \mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, z' \end{array} \right)}$$

Définition : Nombre complexe conjugué
*Pour tout $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit le **conjugué** $\bar{z}$ de z par :*

$$\bar{z} = x - iy = \mathfrak{Re}\, z - i\mathfrak{Im}\, z.$$

Proposition*.— Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Alors

$$\boxed{\textbf{1.} \quad \mathfrak{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad\qquad \textbf{2.} \quad \mathfrak{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

Par conséquent nous avons les équivalences suivantes : $\begin{array}{ccc} z \in \mathbb{R} & \iff & \bar{z} = z \\ z \in i\mathbb{R} & \iff & \bar{z} = -z \end{array}$

Illustration.— le plan complexe, interprétation géométrique de l'addition des nombres complexes.

Notation exponentielle des nombres complexes non nuls

Proposition-définition.— Module d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, Le nombre $z\bar{z}$ est un nombre réel positif. On appelle module de z, et on note $|z|$ le nombre réel posistif :

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\mathfrak{Re}\, z^2 + \mathfrak{Im}\, z^2}}$$

Proposition⋆.— Propriétés du module

Nombres complexes de module 1

Théorème.— Représentation de nombres complexes de module 1

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ l'application définie par $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta}$

L'application φ ainsi définie est surjective de R sur $\mathcal{U}$. De plus elle vérifie :

$$\boxed{\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\theta + \theta') = \varphi(\theta) \times \varphi(\theta')}$$

Pour tout nombre réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Théorème⋆.— Règles de calculs pour l'application φ

1. $e^{i0} = 1$.
2. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
4. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

Théorème⋆.— Formules d'Euler Pour tout nombre réel $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Théorème⋆.— Formule de Moivre Pour tout nombre réel $\theta \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad \text{et} \qquad \big(\cos\theta + i \sin\theta\big)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta}$$

Exercice⋆ : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ **1.** Linéarisez $\sin^3\theta$ **2.** Ecrivez $\cos 4\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$.

Proposition.— Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ un nombre complexe non nul. Il **existe** un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta} = \rho\big(\cos\theta + i \sin\theta\big)}$$

Il n'y a **pas unicité** de l'écriture exponentielle : pour tous (ρ, θ) , $(\rho', \theta') \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$,

$$\boxed{\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \rho & = & \rho' \\ \theta' & \equiv & \theta' [2\pi] \end{array} \right. .}$$

Remarque : Si $z \in \mathbb{C}^\star$, s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, nécéssairement $\rho = |z|$. On appelle **un argument** de z, et on note $\mathsf{arg}\,(z)$ tout nombre réel tel que $z = |z| e^{i\ \mathsf{arg}\,(z)}$.

Corollaire.— La partie *semi*-unicité de l'écriture exponentielle se traduit par

$$\boxed{\big(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star\big), \ \left((z = z') \iff \left\{ \begin{array}{ccc} |z| & = & |z'| \\ \mathsf{arg}\,(z) & \equiv & \mathsf{arg}\,(z')\,[2\pi] \end{array} \right. \right)}$$

Illustration.— Interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes.