Feuille d'Exercices : ensembles et applications

Applications-Equations

***Exercice* 1 :** 1. Résoudre l'équation :

$$9^x + 3^x - 12 = 0. \tag{1}$$

2. Trouvez une relation simple entre $\cos x - \sin x$ et $\sin 2x$. En déduire la résolution de l'équation :

$$2\sin 2x - (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\cos x - \sin x) = 2 + \sqrt{3}. \tag{2}$$

***Exercice* 2 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. En discutant suivant la valeur de y, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(x) = y \tag{3}$$

2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Que vaut $f(\mathbb{R})$?
3. Montrez que f induit une application -notée $f_|$- de $[-1,1]$ dans lui-même. $f_|$ est-elle bijective ?

***Exercice* 3 :** Montrez que l'application numérique f induit une bijection entre des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ à préciser et déterminez alors l'application réciproque lorsque

$$1.\ f(x) = \frac{2+x}{3-x}\ ,\quad 2.\ f(x) = \frac{1-3x}{4+5x}\ ,\quad 3.\ f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

***Exercice* 4 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x} + 3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Montrez que f est bijective et déterminez son application réciproque.

***Exercice* 5 :** Soient $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ deux applications. On note $h = g \circ f$. Démontrez que

1. **Si** h est surjective et g est injective, **alors** f est surjective.
2. **Si** h est injective et f est surjective, **alors** g est injective.

***Exercice* 6 :** Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, trois applications. Démontrez que **si** $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, **alors** f, g et h le sont aussi.

Ensembles

***Exercice** 7 :** Soient $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E.

1. Exprimez les fonctions indicatrices de $A \cap B$, $\complement_E A$ et de $A \setminus B$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$. En déduire les indicatrices de $A \cup B$ et de $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrez que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
3. Démontrez que pour toute partie A de E, il existe une unique partie $X \in \mathscr{P}(E)$ telle que $A\Delta X = \emptyset$.

***Exercice* 8 :** Soit A et B deux parties d'un ensemble non vide E. Démontrez que

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \complement_E B \subset \complement_E A.$$

***Exercice* 9 :** Soient A et B des parties d'un ensemble E. Démontrez que

$$A = B \textit{ si et seulement si } A \cup B = A \cap B.$$

Exercices supplémentaires

Equations

Exercice* 10 *: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$4\sin^2 x + 2(1+\sqrt{2})\cos x - 4 - \sqrt{2} = 0 \tag{4}$$

Exercice* 11 *: Résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel m l'équation :

$$\mathrm{e}^{2x} - 4m\mathrm{e}^{x} + 2(m+1) = 0. \tag{5}$$

Applications

Exercice* 12 *: Etudiez la bijectivité de l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} [0,2[\cup]2,+\infty[& \to &]-\infty,0]\cup]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{x^2-4} \end{array}$$

Déterminez, le cas échéant son application réciproque.

Exercice* 13 *: Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.
Montrez que f est bijective et déterminez son application réciproque.

Exercice* 14 *:

1. On considère l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}.$$

   f est-elle bijective ?
   Si oui, déterminez son application réciproque.

2. Mêmes questions avec l'application

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y) \end{array}.$$

Exercice* 15 *: On considère les applications

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+3y \end{array} \quad \text{et} \quad g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y, x-y) \end{array}.$$

f et g sont -elles injectives, surjectives, bijectives ? Déterminez le cas échéant l'application réciproque.

Exercice* 16 *:

1. On considère l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$

   f est-elle surjective ? injective ? bijective ?

2. Mêmes questions pour l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & = & \dfrac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \\ g(x) & = & x \text{ si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

3. Déterminez les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles surjectives ? injectives ?

Exercice* 17 *: Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrez que :

$$f \text{ est injective } \textit{ si et seulement si } f \text{ est surjective.}$$

Exercice* 18 *: Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, trois applications. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $f \circ g \circ h$ sont bijectives. Montrez que f, g et h sont bijectives.

Exercice* 19 *: Soit E un ensemble. Démontrez que l'application $\begin{array}{cccc} \Theta : & \mathscr{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ & A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective et déterminez son application réciproque.

Exercice** 20 *: Soit $f : E \to F$ une application. Démontrez les caractérisations suivantes :
1. f est injective *ssi* il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$.
2. f est surjective *ssi* il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

En déduire l'équivalence

$$\text{il existe une injection de } E \text{ dans } F \ \textit{ ssi } \ \text{il existe une surjection de } F \text{ sur } E.$$

Ensembles

Exercice* 21 *: Lois d'absorption
Montrez que pour toutes parties A et B d'un ensemble E,

$$A \cup (A \cap B) = A \; ; \; A \cap (A \cup B) = A$$

Exercice* 22 *: Soit E un ensemble, A, B et C des parties de E. On suppose que

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & = & A \cap C \\ B \cup C & = & B \cap A \\ C \cup A & = & C \cap B \end{array}$$

Montrez que $$A = B = C.$$

Exercice* 23 *: Soient E un ensemble, A, B et C des parties de E. Démontrez les égalités suivantes :
1. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

Exercice* 24 *: Soient A, B et C des parties d'un ensemble E Démontrez que :
1. $B = C$ *si et seulement si* $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Exercice* 25 *: Soit E un ensemble. On définit une nouvelle opération dans $\mathscr{P}(E)$, notée $\bigstar$, définie pour toutes parties A et B de E par :

$$A \bigstar B = \complement_E (A \cup B) = \overline{A \cup B}$$

1. Exprimez le complémentaire $\bar{A}$ de A à l'aide de A et de l'opération $\bigstar$.

2. Calculez pour toutes parties A et B de E $(A\bigstar A)\bigstar(B\bigstar B)$.
3. Exprimez finalement, pour toutes parties A et B de E $A\cup B$, $A\setminus B$, $A\Delta B$ à l'aide de A, B et de la loi $\bigstar$ uniquement.

Exercice* **26 :** Soit E un ensemble non vide , A et B deux parties de E. On considère dans $\mathscr{P}(E)$ l'équation :

$$A\cap X = B. \tag{6}$$

1. Donnez une *condition nécessaire et suffisante* (H) pour que (6) possède des solutions.
2. On suppose désormais que (H) est vérifiée. Démontrez que

X est solution de (6 *si et seulement si* il existe $M\in\mathscr{P}(E)$ telle que $X = B\cup(M\setminus A)$.

Exercice* **27 :** Soient E un ensemble, A et B deux parties de$E$. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi\ : & \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B) \\ & X & \mapsto & \big(X\cap A, X\cap B\big) \end{array}.$$

1. Montrez que pour que Φ soit injective, *il faut et il suffit* que $A\cup B = E$.
2. Montrez que pour que Φ soit surjective, *il faut et il suffit* que $A\cap B=\emptyset$.
3. Lorsque Φ est bijective, déterminez son application réciproque.

Exercice* **28 :** Déterminez les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par

$$X = \{x\in\mathbb{R}\mid \exists n\in\mathbb{N}^\star; NON\big((x\geq 1/n)\Rightarrow(x>1-1/n)\big)\}\qquad Y=\{x\in\mathbb{R}\mid \forall y\in[0,1],\ (x>y)\Rightarrow(x>2y)\}$$

Exercice* **29 :** Déterminez les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$X=\{x\in\mathbb{R}\mid (x\geq 2)\Rightarrow(x\in[1,3])\}\qquad Y=\{x\in\mathbb{R}\mid \forall y\in[0,1],\ (x>y)\Rightarrow(x>2y)\}$$