Feuille d'Exercices : Continuité

Continuité des fonctions

***Exercice* 1 :** Etudiez la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \begin{cases} x^2 \ \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_2(x) = \begin{cases} x\ \left(1 - (\ln x)^2\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} & \text{si } x > \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\ (4x - \pi + 1) & \text{si } x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_4(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

***Exercice* 2 :**

1. Soit $f_1 : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x > 0,\ f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. f_1 est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit $f_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in]-1,1[,\ f_2(x) = (1 - x^2)\ \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.
   Etudiez la parité de f_2 et montrez que f_2 se prolonge en une fonction continue sur $[-1,1]$.
3. Soit $f_3 : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0,\ f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$. f_3 est-elle prolongeable par continuité ?
4. Soit $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f_4(x) = \left(1 + \dfrac{5}{3x^2}\right)^{x^2}$. f_4 est-elle prolongeable par continuité ?

Propriétés des fonctions continues

***Exercice* 3 :** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$, et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrez que f possède au moins un point fixe dans $[a,b]$.

***Exercice* 4 :** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Démontrez qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

***Exercice* 5 :** Montrez que toute fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

***Exercice** 6 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Montrez que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

***Exercice* 7 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

1. Montrez que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminez $f(\mathbb{R})$ et f^{-1}

***Exercice* 8 :** On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 2 + \ln x \end{array}$$

1. Calculez $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x) = 0$?
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ possède une *unique* solution dans $\mathbb{R}^{+\star}$, notée α.
3. Montrez que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ sur $\mathbb{R}$. Etudiez l'application réciproque g de f : continuité, tableau de variations et limites aux bornes.
4. Déterminez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(g(t))}{g(t)}$ puis un équivalent de g au voisinage de $+\infty$.

Applications à l'étude des suites

Exercice 9 : On considère pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction polynomiale définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$$

1. En étudiant la fonction polynomiale p_n, démontrez qu'elle possède une *unique* racine positive notée α_n.
2. Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n(\alpha_{n+1}) < 0$. En déduire le sens de variation de la suite (α_n) et démontrez qu'elle converge.
3. Simplifiez l'expression de $p_n(x)$ pour $x \neq 1$ et en déduisez-en la limite de la suite (α_n).

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

1. Etude de la fonction f :
   (a) Déterminez les limites de f en $\pm\infty$.
   (b) Montrez que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.
   (c) Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.
2. Etude d'une suite définie implicitement :
   (a) Montrez que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation
   $$f(x) = n$$
   possède *exactement* deux solutions de signes contraires.
   La solution positive de cette équation est notée a_n.
   (b) Etudiez les variations de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.
   (c) Démontrez que
   $$\forall n \geq 2, \quad a_n \geq \ln n$$
   En déduire le comportement asymptotique de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.