Feuille d'Exercices : Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & 2v & -w & = 1 \\ -2u & -4v & +3w & = -1 \\ u & +v & -3w & = -6 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} u & & +w & = 1 \\ & v & +w & = 0 \\ u & +v & & = 1 \\ 2u & +3v & & = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}^4$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & +t & = 2 \\ 2x & +y & +z & +t & = 1 \\ x & +2y & +2z & & = 2 \end{array}\right.$$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}^5$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} 2x & -14y & +7z & -7t & +11u & = -1 \\ 4x & -10y & +5z & -5t & +7u & = 1 \\ x & +2y & -z & +t & -2u & = 1 \\ 2x & -2y & +z & -t & +u & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\left(S_{(a,b,c)}\right) \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -3z & = a \\ x & +3y & & = b \\ -x & +2y & +6z & = c \end{array}\right.$$

Exercice 6 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système

$$\left(S_{(a,b,c)}\right) \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & = a \\ -2x & -3y & +3z & = b \\ x & +y & -2z & = c \end{array}\right.$$

1. A quelle condition portant sur a, b et c le système (S) admet-il des solutions ?
2. Résoudre $\left(S_{(a,b,c)}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$, lorsque $(a,b,c) = (0,0,1)$ $((a,b,c) = (1,-2,1)$ $(a,b,c) = (1,2,1)$

Exercice 7 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$\left(S_{(a,b,c)}\right) \left\{\begin{array}{lrrl} x_1 & +2x_2 & +\lambda x_3 & = a \\ x_1 & +\lambda x_2 & +(\lambda-1)x_3 & = b \\ x_1 & +(\lambda+1)x_2 & \lambda^2 x_3 & = c \end{array}\right.$$

1. Pour quelles valeurs de λ ce système admet-il une unique solution ?
2. En ce cas, résoudre $S_{(a,b,c)}$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en discutant suivant la valeur du paramètre réel λ le système

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (1-\lambda)x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ -2x_1 & -(3+\lambda)x_2 & +3x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -(2+\lambda)x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

Exercice* 9 *: Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\left\{\begin{array}{llll} & ay & +bz & = c \\ bx & & +az & = c \\ ax & +by & & = c \end{array}\right.$$

Exercice* 10 *: Résoudre suivant les valeurs des paramètres réels m et p le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} 9(m-1)x & -(m+2)y & = \quad p \\ (4m+8)x & -(m-1)y & = m+p \end{array}\right.$$

Exercices supplémentaires

Systèmes d'équations linéaires

Exercice* 11 *: Pour quelles valeurs de k le système

$$\begin{cases} kx & +y & = 1 \\ x & +ky & = 1 \end{cases}$$

admet-il
- aucune solution ?
- une solution unique ?
- une infinité de solutions ?

Exercice* 12 *: Résoudre par la méthode de Gauss le système

$$\begin{cases} 2x & -3y & & = 8 \\ 4x & -5y & +z & = 15 \\ 2x & & +4z & = 1 \end{cases}$$

Exercice* 13 *: Résoudre dans $\mathbb{R}^4$le système suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & -2t & = 6 \\ 2x & -y & -2z & -3t & = 8 \\ 3x & +2y & -z & +2t & = 4 \\ 2x & -3y & +2z & +t & = -8 \end{cases}$$

Exercice* 14 *: Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}^3$, suivant les valeurds du paramètre réel m le système

$$\begin{cases} 2mx & +(m-1)y & +(-m+5)z & = 0 \\ (m-1)x & +2my & +(m+7)z & = 0 \end{cases}$$

Exercice* 15 *: Résoudre dans $\mathbb{R}^3$,suivant la valeur du paramètre réel a le système

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = 3 \\ x & -y & +3z & = 8 \\ x & +2y & +2z & = -3 \\ x & +y & +2z & = a \end{cases}$$

Exercice* 16 *: Résoudre suivant la valeur du paramètre réel t

$$\begin{cases} (2+t)x & +2y & -z & = 0 \\ 2x & +(t-1)y & +2z & = 0 \\ -x & +2y & +(2+t)z & = 0 \end{cases}$$

Exercice* 17 *: Résoudre et discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} mx & +2y & +3z & = 3 \\ (m-1)x & +my & +z & = 1 \\ (m+1)x & +my & +(m-1)z & = m-1 \end{cases}$$

Exercice* 18 *: Résoudre dans $\mathbb{R}^5$ le système

$$\begin{cases} x & -y & +2z & +3t & +u & = 13 \\ x & +y & +2z & +7t & +3u & = 25 \\ -x & +4y & -5z & +12t & -4u & = 2 \\ 2x & -4y & +5z & +t & & = 13 \\ 4x & -3y & +4z & +23t & +9u & = 84 \end{cases}$$

Exercice* 19 *: Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b deux réels. Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système

$$\left\{\begin{array}{ll} x_2 & = ax_1 + b \\ x_3 & = ax_2 + b \\ \vdots & = \quad \vdots \\ x_n & = ax_{n-1} + b \\ x_1 & = ax_n + b \end{array}\right.$$

Exercice* 20 *: Résoudre en fonction du paramètre réel α le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +\alpha y & +\alpha^2 z & +\alpha^3 t & = 1 \\ \alpha x & +\alpha^2 y & +\alpha^3 z & +t & = 1 \\ \alpha^2 x & +\alpha^3 y & +z & +\alpha t & = 1 \\ \alpha^3 x & +y & +\alpha z & +\alpha^2 t & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice* 21 *: Résoudre et discuter en fonction des paramètres réels m et a, b, c, d le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +my & +2mz & = a \\ mx & +y & +mz & = b \\ 2mx & +2my & +z & = c \\ (2m+1)x & +3my & +(2m+1)z & = d \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Calcul matriciel}}$

Exercice* 22 *: On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouvez toutes les matrices carrées B d'ordre 3 telles que $A \times B = 0$.
2. Trouvez toutes les matrices carrées C d'ordre 3 telles que $A \times C = C \times A = 0$.

Exercice* 23 *: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

1. Calculez B^2 puis B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice* 24 *: On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan démontrez que ces matrices sont inversibles et calculez leurs inverses.
2. Démontrez que
   (a) $A^3 - 3A^2 + 2A - 2I = 0$. En déduire que A est inversible et calculez son inverse.
   (b) $B^3 - 6B^2 - 4B - 24I = 0$. En déduire que B est inversible et calculez son inverse.
   (c) $C^3 - 3C^2 + 6C + 6I = 0$. En déduire que C est inversible et calculez son inverse.

Exercice* 25 *: Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n I + b_n A$$

2. Explicitez a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 26 : Soit A la maitrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que A est inversible et calculez son inverse.
2. Montrez qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$
3. Prouvez que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :
$$u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0$$
Calculez α et β. En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculez A^{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 27 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$.
2. Montrez que $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 28 : Soit u la suite définie par la donnée de somn premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

1. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n peut sécrire sous la forme d'une fraction $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels vérifiant
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$
et A est une matrice carré d'ordre 2, indépendante de n que l'on déterminera.
2. Calculez pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. La suite u est-elle conbvergente. Précisez le cas échéant sa limite .

Exercice 29 : On considère la suite u edéfinie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$
On se propose d'étudier cette suite arithmético-géométrique par une méthode matricielle.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 2 - 2^{1-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Montrez que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 et n.

Exercice 30 : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que la matrice P est inversible et caclculez son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.
2. Soit a un nombre réel. Déterminez sans calcul, les valeurs de a pour lesquelles $A_a I$ n'est pas inversible. A est-elle inversible ?
3. Vérifiez que $P^{-1} \times A \times P = D$ est une matrice diagonale. Que remarquez-vous ?
4. Montrez par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

   En déduire l'expression de la mtraice A^n en fonction de n.
5. Exprimez la matrice A^{-1} en fonction P, P^{-1} et D puis en déduire son expression.