Feuille d'Exercices : Calcul matriciel

Opérations sur les matrices

Exercice 1 : Calculez A^2, A^3, A^4 puis A^n dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculez A^{100}.

Indication : vous pourrez utiliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculez A^2 et A^3.
2. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n s'écrit sous la forme :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Déterminez les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n) puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n.
4. Soit $B = A - I$. Calculez B^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire un autre mode de calcul de A^n.

Exercice 4 : On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez J^2 et J^3. En déduire les puissances successives de J : J^k, $k \geq 3$.
2. On pose $T = 2I + J$.
   Donnez l'expression de T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par les relations de récurrence :
$$\forall n \geq 2 \left\{ \begin{array}{lll} a_n & = 2a_{n-1} & \\ b_n & = 2a_{n-1} & +2b_{n-1} \\ c_n & = & \quad b_{n-1} \quad +2c_{n-1} \end{array} \right.$$
   Utilisez les résultats des questions précédentes pour déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_1, b_1,c_1 et de n.

Inversibilité

Exercice 5 :

1. Résoudre en fonction de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ le système (S) $\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +2y & +3z & = a \\ x & -y & & = b \\ -x & +2y & +z & = c \end{array} \right.$
2. En déduire que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminez son inverse.

Exercice 6 :

1. Calculez l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Déduisez-en les solutions des systèmes
$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 3x & +2y & -z & = & 5 \\ x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & -4y & +5z & = & -3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrr} 3x & +2y & -z & = & -1 \\ x & -y & +z & = & 3 \\ 2x & -4y & +5z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 7 : Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, inversez-les !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.
2. En déduire que A est inversible et calculez son inverse.

Exercice 9 : On considère la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle inversible ?
2. Vérifiez que $A - I$ est nilpotent puis calculez l'inverse de A

Rappel : une matrice M est dite **nilpotente** s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $M^n = 0$.

Exercice 10 : Déterminez les valeurs du paramètre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3+\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5+\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3+\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

Applications

Exercice 11 : On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

- la donnée de ses premiers termes u_0 et u_1
- la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

On se propose de calculer l'expression des termes de cette suite par une méthode matricielle.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
   $$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & -2^{n+1}+2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$$
2. Vérifiez que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$
3. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et u_1.
4. Retrouvez ce résultat par la méthode habituelle.

Exercice 12 : Soit $x \in \mathbb{R}^\star$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ 1/x & 0 & x \\ 1/x^2 & 1/x & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez qu'il existe deux réels λ et μ tel que :
   $$(A - \lambda I) \times (A - \mu I) = 0$$
2. En déduire que A est inversible et calculez son inverse.
3. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
   $$A^n = \alpha_n A + \beta_n I$$
   où α_n et β_n sont des entiers naturels.
4. On définit les suites u et v par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_n - \beta_n \text{ et } v_n = 2\alpha_n + \beta_n$$
   Montrez que les suites u et v sont géométriques. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.
5. Utilisez les résultats précédents pour exprimer α_n et β_n en fonction de n. Explicitez finalement A^n.

Exercice 13 : On considère les suites réelles u et v définies par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Démontrez qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
2. Montrez que l'on peut écrire $A = 5I + J$ où I est la matrice identité et J est une matrice que vous déterminerez.
3. Calculez A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Déduisez de la question précédente les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercices supplémentaires

Systèmes d'équations linéaires

***Exercice* 14 :** Pour quelles valeurs de k le système

$$\left\{\begin{array}{rrl} kx & +y & =1 \\ x & +ky & =1 \end{array}\right.$$

admet-il

- aucune solution ?
- une solution unique ?
- une infinité de solutions ?

***Exercice* 15 :** Résoudre par la méthode de Gauss le système

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x & -3y & & =8 \\ 4x & -5y & +z & =15 \\ 2x & & +4z & =1 \end{array}\right.$$

***Exercice* 16 :** Résoudre dans $\mathbb{R}^4$le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +2y & +3z & -2t & =6 \\ 2x & -y & -2z & -3t & =8 \\ 3x & +2y & -z & +2t & =4 \\ 2x & -3y & +2z & +t & =-8 \end{array}\right.$$

***Exercice* 17 :** Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}^3$, suivant les valeurds du paramètre réel m le système

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2mx & +(m-1)y & +(-m+5)z & =0 \\ (m-1)x & +2my & +(m+7)z & =0 \end{array}\right.$$

***Exercice* 18 :** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$,suivant la valeur du paramètre réel a le système

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x & +y & +z & =3 \\ x & -y & +3z & =8 \\ x & +2y & +2z & =-3 \\ x & +y & +2z & =a \end{array}\right.$$

***Exercice* 19 :** Résoudre suivant la valeur du paramètre réel t

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (2+t)x & +2y & -z & =0 \\ 2x & +(t-1)y & +2z & =0 \\ -x & +2y & +(2+t)z & =0 \end{array}\right.$$

***Exercice* 20 :** Résoudre et discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx & +2y & +3z & =3 \\ (m-1)x & +my & +z & =1 \\ (m+1)x & +my & +(m-1)z & =m-1 \end{array}\right.$$

Exercice 21 : Résoudre dans $\mathbb{R}^5$ le système

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x & -y & +2z & +3t & +u & = 13 \\ x & +y & +2z & +7t & +3u & = 25 \\ -x & +4y & -5z & +12t & -4u & = 2 \\ 2x & -4y & +5z & +t & & = 13 \\ 4x & -3y & +4z & +23t & +9u & = 84 \end{array}\right.$$

Exercice 22 : Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b deux réels. Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système

$$\left\{\begin{array}{ll} x_2 & = ax_1 + b \\ x_3 & = ax_2 + b \\ \vdots & = \quad \vdots \\ x_n & = ax_{n-1} + b \\ x_1 & = ax_n + b \end{array}\right.$$

Exercice 23 : Résoudre en fonction du paramètre réel α le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +\alpha y & +\alpha^2 z & +\alpha^3 t & = 1 \\ \alpha x & +\alpha^2 y & +\alpha^3 z & +t & = 1 \\ \alpha^2 x & +\alpha^3 y & +z & +\alpha t & = 1 \\ \alpha^3 x & +y & +\alpha z & +\alpha^2 t & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 24 : Résoudre et discuter en fonction des paramètres réels m et a, b, c, d le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +my & +2mz & = a \\ mx & +y & +mz & = b \\ 2mx & +2my & +z & = c \\ (2m+1)x & +3my & +(2m+1)z & = d \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Calcul matriciel}}$

Exercice 25 : On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouvez toutes les matrices carrées B d'ordre 3 telles que $A \times B = 0$.
2. Trouvez toutes les matrices carrées C d'ordre 3 telles que $A \times C = C \times A = 0$.

Exercice 26 : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

1. Calculez B^2 puis B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

***Exercice* 27 :** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan démontrez que ces matrices sont inversibles et calculez leurs inverses.
2. Démontrez que
   (a) $A^3 - 3A^2 + 2A - 2I = 0$. En déduire que A est inversible et calculez son inverse.
   (b) $B^3 - 6B^2 - 4B - 24I = 0$. En déduire que B est inversible et calculez son inverse.
   (c) $C^3 - 3C^2 + 6C + 6I = 0$. En déduire que C est inversible et calculez son inverse.

***Exercice* 28 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n I + b_n A$$

2. Explicitez a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n.

***Exercice* 29 :** Soit A la maitrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que A est inversible et calculez son inverse.
2. Montrez qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

3. Prouvez que les suites (a_n) et (b_n) vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0$$

   Calculez α et β. En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculez A^{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

***Exercice* 30 :** Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$.
2. Montrez que $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31 : Soit u la suite définie par la donnée de somn premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

1. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n peut sécrire sous la forme d'une fraction $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels vérifiant

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

   et A est une matrice carré d'ordre 2, indépendante de n que l'on déterminera.
2. Calculez pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. La suite u est-elle conbvergente. Précisez le cas échéant sa limite .

Exercice 32 : On considère la suite u edéfinie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

On se propose d'étudier cette suite arithmético-géométrique par une méthode matricielle.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 2 - 2^{1-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 et n.

Exercice 33 : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que la matrice P est inversible et caclculez son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.
2. Soit a un nombre réel. Déterminez sans calcul, les valeurs de a pour lesquelles $A_a I$ n'est pas inversible. A est-elle inversible ?
3. Vérifiez que $P^{-1} \times A \times P = D$ est une matrice diagonale. Que remarquez-vous ?
4. Montrez par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

   En déduire l'expression de la mtraice A^n en fonction de n.
5. Exprimez la matrice A^{-1} en fonction P, P^{-1} et D puis en déduire son expression.