Feuille d'Exercices : Séries Numériques

Les basiques

Exercice 1 : Démontrez la convergence et calculez la somme des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = n^2 x^n$, où $|x| < 1$
2. $u_n = \dfrac{n-1}{3^{n+1}}$
3. $u_n = \dfrac{n\,(n-1)x^n}{n!}$, où $x \in \mathbb{R}$
4. $u_n = \dfrac{n^2\,8^n}{n!}$

Exercice 2 : Etudiez la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{\pi}{2n}$
2. $u_n = \dfrac{n-1}{3^n - 1}$
3. $u_n = 2n \sin(1/n)$
4. $u_n = \ln\big(1 - \dfrac{1}{n+2}\big)$
5. $u_n = \ln\big(\cos(1/2n)\big)$
6. $u_n = \cos(1/n) - 1$
7. $u_n = \dfrac{1}{n\,\sqrt[n]{n}}$
8. $u_n = n\ \ln n e^{-\sqrt{n}}$
9. $u_n = \left(\dfrac{1}{\ln 3n}\right)^n$
10. $u_n = \dfrac{\cos 2n}{3n^2 - 4n + 1}$
11. $u_n = \dfrac{n + \cos n}{e^n + \sin n}$
12. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$

Exercice 3 : Discutez suivant la valeur du paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général :

1. $u_n = \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^\alpha$
2. $v_n = \ln\big(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\big)$

Exercice 4 : Etudiez la convergence et l'absolue convergence des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n \sin \dfrac{2}{3n}$
2. $u_n = (-1)^n \dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = (-1)^n \cos \dfrac{n}{n+1}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \big(\alpha \in \mathbb{R}\big)$

Les théoriques

Exercice 5 : Soit (a_n) une suite réelle décroissante.

1. Montrez que si la série $\sum a_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.
2. Que pouvez-vous dire de la réciroque ?

Exercice 6 : Théorème de convergence par comparaison
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels strictement positifs. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrez que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrez que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 7 : Estimation du reste
On considère la série $\sum u_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\sin(\pi/2^n)}{2^n}$$

1. Démontrez que la série $\sum u_n$ est convergente.

On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ S_n la somme partielle de rang n et S la somme de cette série.

2. Démontrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad |S - S_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

Indication : $n \in \mathbb{N}^\star$ étant fixé, commencez par majorer $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right|$ pour tout $m \geq n+1$ puis passez à la limite quand m tend vers $+\infty$.

3. Pour quelle valeur de n, S_n consitue-t-il une valeur approchée de la somme à 10^{-3} près ?

Exercice 8 : Séries de Mengoli

1. On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ (n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Quelle est la nature de de la série ?
   (b) En utilisant un *télescopage*, calculez la somme de la série de terme général u_n.
2. On s'intéresse à présent à la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n\ (n+1)\ (n+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Quelle est la nature de la série ?
   (b) Déterminez $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

   (c) Calculez la somme de la série de terme général v_n.

***Exercice* 9 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = a \in]0, 1[$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Démontrez que la suite u est décroissante à partir du rang 1 et convergente vers 0.
2. Prouvez la convergence de la série de terme général u_n^2 et calculez sa somme.
3. A l'aide des sommes partielles, prouvez que la série de terme général $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est divergente vers $+\infty$.
4. Utilisez la règle des équivalents pour en déduire la nature de la série de terme général u_n.

Les classiques

***Exercice* 10 :** Série harmonique

On considère la série harmonique $S = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ S_n la somme partielle de rang n de cette série.

1. **Convergence de la série harmonique**
   Quelle est la nature de la série harmonique ?
2. **Comportement asymptotique de la série harmonique**
   On introduit la suite auxiliaire ν définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \nu_n = S_n - \ln n$$

   (a) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ $\dfrac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$. et en déduire que pour tout entier $n \geq 2$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

   (b) En déduire que la suite (ν_n) est monotone et qu'elle converge. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n$.
   γ est appelée la **Constante d'Euler**.
   (c) En déduire finalement que

$$S_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

***Exercice* 11 :** Séries alternées

Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. On considère la série $\sum(-1)^n\ a_n$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ S_n la somme partielle de rang n de cette série.

1. Démontrez que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
3. Notons pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\quad R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty}$ le reste d'ordre p de la série S.
   Démontrez l'estimation

$$|R_p| \leq a_{p+1}$$

***Exercice* 12 :** Série harmonique alternée

On considère la **série harmonique alternée** $A = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

1. Montrez que la série A est convergente. Est-elle absolument convergente ?
2. Démontrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{2\leq 2k\leq n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3. Utilisez l'égalité $\sum_{k=1}^{n} 1/k = \ln n + \gamma + o(1)$ pour démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$