Espaces probabilisés - le cas général

Propriétés des probabilités

***Exercice* 1 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "*face*" est p, avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers "*face*" ne soit jamais suivi de "*pile*".

***Exercice* 2 :** On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit de 1/3.

- si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dé A
- si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculez la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup.
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^\star$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

***Exercice* 3 :** Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules en la remettant si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanches.
Quelle est la probabilité de tirer exactement une boule blanche en n tirages ?

***Exercice* 4 :** les danseurs de Chicago
Lors d'une compétition de danse, n couples mariés (n hommes et n femmes) se présentent. On constitue au hasard n couples (homme-femme) pour l'épreuve.

1. Quelle est la probabilité pour que tous les couples ainsi reconstitués correspondent aux couples initiaux ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'aucun couple reconstitués corresponde aux couples initiaux ?

***Exercice* 5 :** Une urne contient deux boules blanches et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne en remettant la boule après avoir noté sa couleur, jusqu'à ce qu'on obtienne la boule rouge. Montrez que l'on effectuera presque sûrement un nombre fini de tirages.

***Exercice* 6 :** Tournoi a deux joueurs
Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé (supposé parfaitement équilibré). A commence la partie et lance le dé.

- S'il obtient 1 ou 2, A est déclaré vainqueur et la partie s'arrête.
- sinon, B prend la main et jette le dé :
  - S'il obtient 3,4 ou 5, il a gagné et la partie s'arrête.
  - Sinon, A prend la main et on recommence dans les mêmes conditions ...

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculez les probabilités des événements :
   - A_{2n-1} "*A gagne au $(2n-1)^{ième}$ lancer*",
   - B_{2n} " *B gagne au $(2n)^{ième}$ lancer* ".
2. Quelles sont les probabilités des événements G_A "*A gagne*", G_B "*B gagne*" et H "*la partie ne s'arrête pas*".

Probabilités et suites récurrentes

***Exercice* 7 :** On dispose de deux pièces A et B :

- la pièce A donne "face" avec la probabilité $1/2$.
- la pièce B donne "face" avec la probabilité $2/3$.

On chiosit une pièce au hasard. On la lance :

- si on obtient "face", on conserve la pièce ;
- si on obtient "pile", on change de pièce.

On effectue ainsi une suite de lancers.
Calculez la probabilité d'obtenir "face" au $n^{\text{ième}}$ lancer.

***Exercice* 8 :** On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle les probabilités d'obtenir "pile" et "face" sont p, et $q = 1 - p$ respectivement, où $p \in]0,1[$. On notera P pour "pile" et F pour "face".

1. Soit A_n l'événement : "*la séquence PF apparaît pour la première fois aux $(n-1)^{ième}$ et $n^{ième}$ lancers*". Calculez $p(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "*la séquence PF apparaît au moins une fois*".

3. Soit B l'événement : "*la séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant*". Calculez $p(B)$.

Exercice 9 : Soit $p \in]0,1[$ un réel. Une personne effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. Elle a une probabilité p d'obtenir "pile" et une probabilité $q = 1 - p$ d'obtenir " face".

- la personne **gagne** si elle a obtenu deux "pile" de plus que de "face" ;
- la personne **perd** si elle a obtenu deux "face" de plus que de "pile".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculez la probabilité de l'événement O_n : "*en $2n$ coups, la personne n'a ni gagné, ni perdu, et à l'issu du $2n$ ième lancers, elle a obtenu autant de "pile" que de "face"*".
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déduire de la question précédente la probabilité que la partie dure plus (strict) de $2n$ coups.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculez la probabilité que la personne gagne après $2n$ lancers.
4. Calculez la probabilité que la personne gagne.

Exercice 10 : Etude du marché de Merville

Chaque semaine, aux Halles de Merville , il y a trois fromagers : A, B et C. L'évolution du marché se fait de la façon suivante :

- si une semaine, une personne achète son fromage à A, la semaine suivante elle choisit indifféremment A, B ou C.
- si une semaine, une personne achète son fromage à B, alors la semaine suivante elle reste fidèle à B.
- si une semaine, une personne achète son fromage à C, alors la semaine suivante elle achète son fromage à A avec une probabilité $1/12$, à B avec une probabilité $7/12$ et à C avec la probabilité $1/3$.

Au départ la personne choisit au hasard l'un des trois fromagers. On note a_n, b_n et c_n les probabilités pour que la personne achète son fromage à A, B ou C la $n^{\text{ième}}$ semaine.

1. En utilisant la formule des probabilités totales déterminez une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}.
2. En déduire l'expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n et déterminez la limite de ces suites.

Probabilités et matrices

Exercice 11 : Amélie, Bérangère et Clothilde jouent à la balle

Lorsque qu'Amélie a la balle elle la passe à Bérangère avec la probabilité $0,75$ et à Clothilde avec la probabilité $0,25$.
Lorsque que Bérangère a la balle elle la passe à Amélie avec la probabilité $0,75$ et à Clothilde avec la probabilité $0,25$.
Quant à Clothilde, elle passe systèmatiquement la balle à Bérangère.

On désigne par A_n, B_n et C_n les probabilités pour qu'à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancers, ce soit Amélie, Bérangère ou Clothilde qui ait la balle.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminez des relations de récurrence entre $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ et A_n, B_n, C_n.
2. En déduire l'existence d'une matrice carrée d'ordre 3, notée M telle que
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} \qquad \text{puis que} \qquad \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$
3. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que P est inversible et calculez $P^{-1} \times M \times P$.
4. En déduire l'expression en fonction de n, de M^n puis de A_n, B_n et C_n.
5. Calculez les limites quand n tend vers l'infini des probabilitrés A_n, B_n et C_n.

***Exercice* 12 :** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant au sens large ?

***Exercice* 13 :** Soit $ABCD$ un carré. A l'instant $t = 0$, une bille se trouve en A (res· B,C, D) avec une probabilité a_0, (resp b_0, c_0, d_0). Elle est obligée de se déplacer à chaque seconde vers un sommet consécutirf du carré. Calculez la probabilité que la bille se trouve en A (res· B,C, D) à l'instant $t = n$.

***Exercice* 14 :** Soient r et s deux réels compris entre 0 et 1. On considère deux urnes :

l'urne blanche contient une proportion de r boules noires et de $1 - r$ boules blanches.

l'urne noire contient une proportion de s boules blanches et de $1 - s$ boules noires.

On effectue une suite de tirages avec remise de la façon suivante :

- le premier tirage se fait dans l'urne blanche.

Puis :

  - si la boule tirée est blanche, on tire la prochaine boule de l'urne blanche
  - si la boule tirée est noire on effectue le prochain tirage dans l'urne noire.

- Ainsi de suite, ...

On note pour $n \in \mathbb{N}^\star$ p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage.

1. En utlisant la formule des probabilités totales, déterminez une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et sa limite lorsque n tend vers l'infini.

***Exercice* 15 :** Deux joueurs lancent alternativement un dé à six faces non truqué. Le joueur A commence. Le joueur qui le premier obtient un 6 est déclaré vainqueur.

1. Quelles sont les probabilités de gain de chacun des deux joueurs ?
2. Quelle est la probabilité pour que le jeu s'arrête en monis de 20 coups ?

***Exercice* 16 :** On considère le jeu suivant : on lance trois pièces de monnaie équilibrées. Si les trois pièces donnent *pile* le jeu s'arrête. Sinon, on recommence.

1. Déterminez la probabilité p_n de l'événe"ment E_n *"le jeu s'arrête au $n^{\text{ième}}$ lancer"*.
2. Déterminez la probabilité q_n de l'événe"ment F_n *"le jeu s'arrête au plus tard au $n^{\text{ième}}$ lancer"*.
3. Calculez les limites quand n ytend vers l'infini de p_n et de q_n. Que conclure ?

***Exercice* 17 :** On considère le jeu suivant : n personnes ($n \geq 3$) jettent successivement une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Si **toutes les les pièces sauf une** donnent le même résultat (pile ou face peu importe)le joueur ayant obtenu le résultat singulier est déclaré perdant.

1. Quelle est la probabilité p pour que cette circonstance se produise ?
2. Calculez en faonction de p, la probabilité $p(k$ pour que l'on obtienne un perdant pour la première fois à la $k^{\text{ième}}$ partie ?
3. Montrez que la série de terme général $p(k)$ converge et calculez sa somme.

***Exercice** 18 :** Soit p un nombre réel tel que $0 < p < \frac{2}{3}$.

Dans un pays, on admet que la probabilité qu'une famille ait n enfants pour $n \in \mathbb{N}^\star$ est

$$p_n = \frac{1}{2}p^n$$

De plus à chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est $\frac{1}{2}$.

On considère une famille de ce pays et on note pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

– E_n l'événement *"la famille compte n enfants"*
– G_n l'événement *"la famille a n garçons"*

1. Calculez la probabilité q pour qu'une famille ait au moins un enfant. En déduire la probabilité q_0 pour qu'elle n'ait aucun enfant.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n \geq k$. Calculez la probabilité que cette famille ait exactement k garçons sachant qu'elle a n enfants.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculez la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
4. Calculez la probabilité pour que la famille n'ait aucun garçon.

***Exercice* 19 :** PROMENADE ALÉATOIRE SUR UN DAMIER

Un damier est formé de neuf cases. Celle du centre est notée O, celles des coins sont notées I et les autres sonts notées J.

Une puce se trouve à l'instant $t = 0$ au centre du damier et se déplace de la façon suivante : à chaque instant elle saute au hasard vers une case contigüe de celle où elle se trouve.

1. Calculez la probabilité p_n que la puce soit en O à l'instant $t = n$.
2. Quelle est la probabilité pour que la puce revienne en O pour la première fois à l'instant $t = n$?