Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 1 : On lance simultanément deux dés à 6 faces. On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue des numéros obtenus.

1. Déterminez l'ensemble des valeurs possibles pour Z.
2. Déterminez la loi de Z et sa fonction de répartition.
3. Calculez l'espérance et la variance de Z.

Exercice 2 : Une urne est composée de n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise dans cette urne. On note $b_1, b_2, \dots b_k, \dots$ les numéros des boules obtenus. On s'arrête dès que $b_k \geq b_{k-1}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminez l'ensemble des valeurs possibles pour X.
2. Déterminez la fonction de répartition de X et en déduire sa loi.
3. Calculez l'espérance de X. Puis $\lim_{n\to\infty} E(X)$.

Exercice 3 : Un joueur décide de jouer à "Pile ou Face" avec une pièce qui donne *Pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$ en procédant de la manière suivante :

- Pour le premier lancer, il parie 1 euro.
  - s'il gagne : le jeu s'arrête et la banque lui verse 2 euros ;
  - sinon , il parie 2 euro supplémentaires et procède au deuxième lancer.
    - s'il gagne : le jeu s'arrête et la banque lui verse 4 euros ;
    - sinon , il parie 4 euro supplémentaires et procède au troisième lancer.

    etc. . .

Quelle est l'éspérance de gain du joueur ?

Exercice 4 : Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées 1, 2, $\cdots$, n, $\cdots$ et on fait les hypothèses :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la probabilité que le sauteur passe la hauteur n est $1/n$
– Les différents sauts sont indépendants.

Soit X le numéro du dernier saut réussi.

1. Calculez pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la valeur de $P[X = n]$. Vérifiez que X est bien une variable aléatoire.
2. Calculez, si elle existe, l'espérance de $X + 1$. *(on utilisera le théorème de transfert)*
   En déduire que X admet une espérance et la calculer.
3. Démontrez de même l'existence de $V(X)$ et calculer sa valeur. *(on pourra étudier l'espérance de $X^2 - 1$)*

Exercice 5 : Une urne contient $n \in \mathbb{N}^\star$ boules numérotées de 1 à n. On effectue des tiralges dsuccessifs d'une boule de cette urne, sans remise jusqu'à ce que les boules portant les numéros 1 2 et 3 soient sorties.

1. Calculez la probabilité pour que les boules 1,2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre.
2. Quelle est la probabilité que les boules 1,2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?
3. On note X le nombre de tirages effectués. Déterminez la loi de X ainsi que son espérance.

Exercice 6 : Une urne contient n boules noires et $3n$ boules blanches. On tire successivement et avec remise des boules. Le jeu s'arrête lorsque :

– on tire une boule noire, ou bien
– on a tiré successivement 3 boules blanches.

On note T la durée de la partie exprimée en nombre de tirages.

1. Déterminez $T(\Omega)$. Quelle est la loi de T, son espérance ?
2. On suppose à présent que les tirages se font sans remise. Quelle est alors la loi de T ? son espérance ?
   Calculez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $E(X)$. Que constatez-vous ?

Exercice 7 : Dans un laboratoire, on teste la mémoire des souris en faisant l'expérience suivante :
Un souris est placée au centre d'un labyrinthe. Quatre chemins en apparence identiques se présentent. Un seul mène au morceau de fromage, les trois autres conduisent la souris à recevoir une décharge électrique...[1]

[1] Pauv' bête !

Si la souris choisit le bon chemin, elle se régale et l'expérience est terminée... si au contraire elle choisit un mauvais chemin, elle est reconduite au centre pour un nouvel essai...
On note X le nombre de tentatives effectuées jusqu'à ce que la souris prenne le bon chemin.

1. Supposons dans cette question que **la souris a de la mémoire.**
   A chaque nouvel essai, elle évite donc les mauvais chemins qu'elle a déjà empruntés, et choisit au hasard parmi les pistes inexplorées.
   (a) Déterminez la loi de X.
   (b) Calculez son espérance.
2. Mêmes questions, en supposant cette fois que **la souris n'a aucune mémoire.**
   Elle choisit donc au hasard parmi les 4 possibilités.
3. Supposons enfin que **la souris a une mémoire immédiate.**
   Elle ne se souvient que de sa dernière tentative.
4. On suppose que les trois situation précédentes sont équiprobables. On réalise l'expérience et on constate que la souris trouve le morceau de fromage à la quatrième tentative.
   Quelle est la probabilité que la souris ait de la mémoire.

***Exercice* 8 :** Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans cette urne suivant le protocole suivant :
A chaque tirage, on remet la boule accompagnée d'une autre boule de la même couleur (provenant d'un stock illimité).
On note X le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois une boule blanche.

1. Calculez $p[X = 1]$ et $p[X = 2]$.
2. Calculez pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ la valeur de $p[X = n]$.
   On pourra vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité
3. Déterminez, si celle-ci existe, l'espérance de X.

***Exercice* 9 :** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.

1. Montrez que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\sum_{k=1}^{n} P[X = k] = \left(\sum_{k=0}^{n-1} P[X > k]\right) - n\ P[X > n].$$
2.
   (a) On suppose que X admet une espérance, démontrez que $\lim_{n\to\infty} nP[X > n] = 0$. En déduire que la série de terme général $P[X > n]$ est convergente et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P[X > n] = E(X).$$
   (b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $P[X > n]$ est convergente. Montrez que X admet une espérance donnée et que
$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X > n].$$

Exercices supplémentaires

Variables aléatoires réelles discrètes

***Exercice* 10 :** On sait que la population française est constituée de 10% de gauchers. On considère donc que la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit gaucher est égale à 1/10.

1. Dans une entreprise de couture on recrute 8 employés. Soit X le nombre d'employés gauchers recrutés.
   (a) Quelle est la loi de X ? son espérance ? son écart type ?
   (b) Calculer la probabilité pour que le groupe contienne :
      i. Exactement un gaucher.
      ii. Au moins un gaucher.
      iii. Exactement 3 gauchers.
2. L'atelier dans lequel les employés vont travailler est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et de 3 pour gauchers. Quelle est la probabilité que chacun des 8 membres du personnel trouvent une paire de ciseaux lui convenant ?
3. Soit Y le nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à leur convenance. Dresser un tableau donnant Y en fonction du nombre de gauchers recrutés.
   En déduire la loi de probabilité de Y ainsi que son espérance.

***Exercice* 11 :** Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$, et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \ 4P(X = k + 2) = 5P(X = k + 1) - P(X = k)$$

1. Montrer que pour tout entier k non nul, $P(X = k)$ est de la forme $A + \dfrac{B}{4^n}$, ou A et B sont deux réels.
2. Déterminer A et B. Reconnaitre la loi de X, et déterminer son espérance ainsi que sa variance.

***Exercice* 12 :** On effectue des lancers successifs de 3 dés cubiques équilibrés : D_1, D_2 et D_3, de manière à obtenir trois 6.
Après le premier lancer, on ne relance donc que les dés qui n'ont pas donnés 6, et ainsi de suite jusqu'à obtenir trois 6.

1. On note X_1 [resp X_2, X_3] la variable aléatoire égale au rang d'apparition du 1er 6 avec le dé D_1 [resp D_2, D_3].
   Reconnaitre les lois respectives de X_1, X_2 et X_3.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécéssaires à l'obtention des trois 6 suivant le protocole ci dessus.
   (a) Calculer pour tout entier k non nul et pour $i = 1, 2, 3$, la valeur de $p(X_i \leq k)$.
   (b) En déduire pour tout entier k non nul la valeur de $p(X \leq k)$.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer si elle existe l'espérance mathématique de X.

***Exercice* 13 :** Une urne contient $2n$ boules : n blanches et n rouges. On tire au hasard, et simultanément n boules.
On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Démontrer la formule de Van der Monde.

***Exercice* 14 :** Une droite est divisée en segments de longueur 1, numérotés 0,1,2,3,... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite en faisant des sauts de longueur 1 ou 2, au hasard.
Au départ elle est sur la case 0. Soit n un entier non nul. On désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer de même la loi de probabilité de X_2, son espérance et sa variance.
3. (a) Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a effectué un saut de 2 cases au cours des n premiers sauts.
   Reconnaitre la loi de probabilité de Y_n. Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Exprimer X_n en fonction de Y_n en déduire la loi de probabilité de X_n, son espérance et sa variance.
4. (a) On note, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, Zi la variable aléatoire prenant la valeur 2 si le $i$ème saut de la puce est de 2 cases et prenant la valeur 1 dans le cas contraire.
   Déterminer, pour tout i, la loi de Z_i ainsi que son espérance.
   (b) Exprimer X_n en fonction des variables Z_i $(1 \leq i \leq n)$.
   Retrouver ainsi l'espérance de X_n.

***Exercice* 15 :**

Un puce se ballade dans un carré constitué de 9 cases : P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 et I_1, I_2, I_3, I_4.

P_1	I_1	P_2
I_4	P_0	I_2
P_4	I_3	P_3

On suppose que la puce est initialement située dans la case centrale P_0. La puce saute au hasard d'une case vers une autre case *adjacente*, c'est-à-dire ayant un coté commun à la case de départ.

1. Après un nombre de pairs de sauts, sur quelles cases la puce peut-elle se trouver ?
2. La puce étant située dans une case I_j, ($j \in [\![1,4]\!]$), quelle est la probabilité pour qu'elle retourne en P_0 au prochain saut ?
3. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de sauts nécessaires pour le premier retour de la puce en P_0.
   Déterminez la loi de X.
4. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de passages en P_0 en $(2n)$ sauts.
   Déterminez la loi de Y et son espérance.

Exercice 16 : LE JEU DE L'ANORMAL
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. n individus jettent chacun une pièce honnête. Une personne gagne si elle obtient le contraire de toutes les autres.

1. Quelle est la probabilité qu'une partie comporte un gagnant ?
2. On effectue une succession de parties indépendantes les unes des autres jusqu'à l'obtention d'un gagnant. On note X le nombre de parties nécessaires à l'obtention d'un gagnant.
   Déterminez la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 17 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ strictement positif.
Calculez $E(\dfrac{1}{1+X})$.

Exercice 18 : Killy va au téleski et emprunte l'une des N perches de l'appareil. On admet qu'entre cet instant et la prochaine remontée de Killy, le nombre de skieurs se présentant au téleski suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Quelle est la probabilité que Killy reprenne la même perche ?

Exercice 19 : TEMPS D'ATTENTE

1. Montrez que pour tout couple d'entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \binom{k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

2. On tire successivement et sans remise toutes les boules d'une urne contenant initialement n boules blanches et n boules noires. On appelle X le nombre de tirages tout juste nécessaire pour obtenir toutes les boules noires.
   Quelle est la loi de X ? Déterminez son espérance et sa variance.

Exercice 20 : Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Quelle est la probabilité que X soit multiple de 3 ?

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante :
- si $X = k$, avec $k > 0$, alors $Y = k$;
- si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $[\![1,n]\!]$.

Déterminez la loi de Y et calculez son espérance.

Exercice 22 : Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre strictement positif λ.

1. Majorer la probabilité $P[X \geq n]$ pour $n > \lambda - 1$.
2. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ $P[X \geq n] \sim P[X = n]$.

Exercice 23 : TEMPS D'ATTENTE DU N^IÈME SUCCÈS
Une urne contient des boules blanches et des boules noires. On désigne par $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir une boule blanche et $q = 1-p$ la probabilité d'obtenir une boule noire.
On procède à une succession de tirages avec remise de boules dans l'urne.

1. On note X_1 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche.
   (a) Déterminez $X_1(\Omega)$.
   (b) Calculez $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir n boules blanches.
   Déterminez la loi de X_n, son espérance et sa variance.