Lois discrètes usuelles

Exercice 1 : Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et qu'il existe $p \in]0,1[$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P[X = n] = a\,p^n.$$
Déterminez la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P[X = k] = a \cdot \binom{n}{k}.$$
Déterminez la loi de X, son espérance et sa variance.
3. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ et que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 4\,P[X = n+2] = 5\,P[X = n+1] - P[X = n].$$
Déterminez la loi de X, son espérance et sa variance.
4. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que
$$\forall, n \in \mathbb{N}^\star,\ P[X = n] = \frac{4}{n}\,P[X = n-1].$$
Déterminez la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2 : On lance un dé honnête jusqu'à l'obtention d'un as. On note X le nombre de jets nécessaires. Donnez la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 3 : Un candidat passe chaque année 3 concours indépendants, avec une probabilité de réussite à chaque concours de $1/3$.
Déterminez la loi du nombre X d'années nécessaires à l'intégration.

Exercice 4 : Une urne contient $2n$ boules : n blanches et n rouges. On tire au hasard, et simultanément n boules.
On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Donnez l'espérance et la variance de X.

Exercice 5 : Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :

– Lorsque X prend une valeur impaire, Y vaut 0

– Lorsque X est paire, Y est égale à $\dfrac{X}{2}$

Déterminez la loi de Y.

Exercice 6 : Soit X une v.a.r. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculez $E(Y)$.
2. On suppose que $p = 1/2$ et on définit une nouvelle variable aléatoire $Z = \dfrac{A^X}{2n}$. Calculez $E(Z)$.

Exercice 7 : Tests sanguins
On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

Méthode I On analyse le sang de chacune des N personnes.

Méthode II On regroupe les N individus en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus d'un même groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on analyse alors le sang des n individus du groupe.

1. Quelle est la loi de la v.a.r. X égale au nombre de groupes positifs.
2. Soit Y la v.a.r. égale au nombre d'analyse dans la deuxième méthode. Calculez en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0,01$.

Exercice 8 : Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 2000 mètres à la vitesse de 10 kilomètres par heure. Il doit franchir 10 obstacles, indépendants les uns des autres.
La probabilité de franchir un obstacle sans faute est de $\frac{3}{5}$.

1. On note X la variable aléatoire qui désigne le nombre d'obstacles franchis sans fautes par le cavalier.
   Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance.
2. On suppose que si un obstacle est franchi sans faute, le cavalier ne perd pas de temps, dans le cas contraire, le cavalier perd une minute.
   Soit T la variable aléatoire égale à la durée en minutes du parcours.
   Exprimer T en fonction de X, en déduire la durée moyenne d'un parcours.

***Exercice* 9 :** Le service de dépannage d'un hypermarché spécialisé dans la vente de matériel informatique dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Les interventions ont parfois lieu avec du retard. On admet que les appels ont lie indépendamment les uns des autres et que pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à quatre reprises. On désigne par X le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminez la loi, l'espérance et la varaince de X.
   (b) Calculez la probabilité de l'événement "*le client a subi au moins un retard*"
2. Au cours des années 1993 et 2003, le service après-vente enregistre une succession d'appels.
   Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2003 (resp. 1993) définit une variable aléatoire Y (resp.Z).
   (a) Déterminez les lois de Y et Z.
   (b) Calculez pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $P[Y \leq k]$.
   (c) Soit $T = \mathsf{max}\,(Y, Z)$. Clalculez pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ $P[T \leq k]$. En déduire la loi de T et son espérance.

***Exercice** 10 : Loi de Pascal : temps d'attente du n$^{\text{ième}}$ succès**
Une urne contient des boules blanches et des boules noires. On désigne par $p \in]0, 1[$ la probabilité d'obtenir une boule blanche et $q = 1-p$ la probabilité d'obtenir une boule noire.
On procède à une succession de tirages avec remise de boules dans l'urne.

1. On note X_1 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche.
   (a) Déterminez $X_1(\Omega)$.
   (b) Calculez $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir n boules blanches.
   Déterminez la loi de X_n, son espérance et sa variance.

***Exercice** 11 :**
1. Montrez que pour tout couple (n, p) d'entiers naturels
$$\sum_{k=n}^{n+p} \binom{k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$
2. Dans une urne contenant initialement n boules blanches et n boules noires, on prélève successivement et sans remise les boules.
   On note X le nombre de tirages juste nécessaires pour l'obtention de toutes les boules noires.
   (a) Déterminez la loi de X
   (b) Déterminez son espérance, sa variance.

***Exercice** 12 :** Un insecte pond des œufs suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf a une probabilité d'éclore égale à $p \in]0, 1[$.
Etudiez la loi et l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre d'insectes nés.

Exercices supplémentaires

Variables aléatoires discrètes

***Exercice* 13 :** Une urne contient 5 boules distinctes. On tire trois boules une à une et avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nompbre de boules différentes tirées. Déterminez la loi de X.

***Exercice* 14 :** Soient n et p deux entiers strictement positifs tels que $p \leq n$. Une urne contient n boules nuumérotées de 1 à n.
On tire simultanément p boules de l'urne. On note X la v.a.r. correspondant au plus grand des numéros tirés et Y la v.a.r. correspondant au plus petit.

1. Déterminez la fonction de répartition de X puis en déduire la loi de X.
2. Déterminez de même la fonction de répartition de Y et en déduire sa loi.
3. Caclculez l'espérance et la variance de ces deux lois.

***Exercice* 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P[X = k] = \beta \, \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$$

Déterminez β puis calculez l'espérance et la variance de X.

***Exercice* 16 :** Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad P[X = n] = \frac{1}{2^{n-2}}$$

Vérifiez la loi de X et calculez son espérance.

***Exercice* 17 :** Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la suite, $p_n = P[X = n]$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\, p_{n+2} = 5\, p_{n+1} - p_n$$

Déterminez la loi de X

***Exercice* 18 :** Soit X une vaiable aléatoire réelle.

1. On suppose que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Démontrez que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P[X \geq k]$$

2. On suppose dans cette question que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Démontrez que si $E(X)$ existe, alors la série de terme général $P[X \geq k]$ est convergente et que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P[X \geq k]$$

Réciproque ?

***Exercice* 19 :** On sait que la population française est constituée de 10% de gauchers. On considère donc que la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit gaucher est égale à 1/10.

1. Dans une entreprise de couture on recrute 8 employés. Soit X le nombre d'employés gauchers recrutés.
   (a) Quelle est la loi de X ? son espérance ? son écart type ?
   (b) Calculer la probabilité pour que le groupe contienne :
      i. Exactement un gaucher.
      ii. Au moins un gaucher.
      iii. Exactement 3 gauchers.
2. L'atelier dans lequel les employés vont travailler est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et de 3 pour gauchers. Quelle est la probabilité que chacun des 8 membres du personnel trouvent une paire de ciseaux lui convenant ?
3. Soit Y le nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à leur convenance. Dresser un tableau donnant Y en fonction du nombre de gauchers recrutés.
   En déduire la loi de probabilité de Y ainsi que son espérance.

***Exercice* 20 :** Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$, et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \;\; 4P[X = k+2] = 5P[X = k+1] - P[X = k]$$

1. Montrer que pour tout entier k non nul, $P[X = k]$ est de la forme $A + \dfrac{B}{4^n}$, ou A et B sont deux réels.
2. Déterminer A et B. Reconnaitre la loi de X, et déterminer son espérance ainsi que sa variance.

***Exercice* 21 :** On effectue des lancers successifs de 3 dés cubiques équilibrés : D_1, D_2 et D_3, de manière à obtenir trois 6.
Après le premier lancer, on ne relance donc que les dés qui n'ont pas donnés 6, et ainsi de suite jusqu'à obtenir trois 6.

1. On note X_1 [resp X_2, X_3] la variable aléatoire égale au rang d'apparition du 1er 6 avec le dé D_1 [resp D_2, D_3].
   Reconnaitre les lois respectives de X_1, X_2 et X_3.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécéssaires à l'obtention des trois 6 suivant le protocole ci dessus.
   (a) Calculer pour tout entier k non nul et pour $i = 1, 2, 3$, la valeur de $P[X_i \leq k]$.
   (b) En déduire pour tout entier k non nul la valeur de $P[X \leq k]$.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.
3. $\star\star\star$ Calculer si elle existe l'espérance mathématique de X.

Exercice 22 : Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées 1, 2, $\cdots$, n, $\cdots$ et on fait les hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la probabilité que le sauteur passe la hauteur n est $1/n$
- Les différents sauts sont indépendants.

Soit X le numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la valeur de $P[X = n]$. Vérifier que X est bien une variable aléatoire.
2. Calculer, si elle existe, l'espérance de $X + 1$. *(on utilisera le théorème de transfert)*
   En déduire que X admet une espérance et la calculer.
3. Démontrer de même l'existence de $V(X)$ et calculer sa valeur. *(on pourra étudier l'espérance de $X^2 - 1$)*

Exercice 23 : Une droite est divisée en segments de longueur 1, numérotés 0,1,2,3,... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite en faisant des sauts de longueur 1 ou 2, au hasard.
Au départ elle est sur la case 0. Soit n un entier non nul. On désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer de même la loi de probabilité de X_2, son espérance et sa variance.
3. (a) Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a effectué un saut de 2 cases au cours des n premiers sauts.
   Reconnaitre la loi de probabilité de Y_n. Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Exprimer X_n en fonction de Y_n en déduire la loi de probabilité de X_n, son espérance et sa variance.
4. (a) On note, pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, Zi la variable aléatoire prenant la valeur 2 si le $i$ème saut de la puce est de 2 cases et prenant la valeur 1 dans le cas contraire.
   Déterminer, pour tout i, la loi de Z_i ainsi que son espérance.
   (b) Exprimer X_n en fonction des variables Z_i ($1 \leq i \leq n$).
   Retrouver ainsi l'espérance de X_n.

Lois discrètes usuelles

Exercice 24 :

1. Soit λ un réel. Montrer que $\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, et Y la variable aléatoire égale à 0 si X est paire et 1 sinon.
   Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 25 : Un exercice de math est posé au concours. La probabilité qu'il soit correctement résolu augmente avec le nombre de fois où il est posé. La probabilité p_n qu'il soit bien résolu à la n ième fois où il est posé est évaluée à

$$p_n = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Calculez l'espérance mathématique du nombre de fois nécessaire pour que l'exercice soit correctement résolu.

Exercice 26 : On considère une urene contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p \in]0, 1[$. On effectue des tirages avec remise dans cette urene, jusqu'à l'obtention de r boules blanches. Soit X le nombre de boules noires obtenues (avant la $r^{\text{ième}}$ boule blanche).

1. Calculez pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P[X = k]$
2. Montrez Montrez que l'on obtient presque sûrement r boules blanches en un nombre fini de tirages.
3. Calculez $E(X)$.

Exercice 27 : Questions à choix multiples

1. On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses. On lui attribue un point par bonne réponse. Soit X_1 le nombre de points obtenus.
   Déterminez la loi de X.

2. Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, l'examinateur lui offre la possibilité d'une deuxième réponse. On attribue alors $\dfrac{1}{2}$ point par bonne réponse ainsi obtenue. On note X_2 le nombre de points obtenus lors de ces seconds choix.
   Déterminez la loi de X_2.
3. Soit X le nombre total de points obtenus. Calculez $E(X)$.
4. Déterminez k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

***Exercice* 28 :** Un responsable de magasin achète un très grand nombre n de lots contenant chacun 10 T-shirt de tailles différentes. Un lot a une probabilité de $0,049$ de contenir une pièce avec un défaut. Lorsqu'il constate qu'un T-shirt a un défaut, il renvoie tout le lot à son grossiste.
Comment déterminer n pour que le responsable ait au plus un lot à retourner au grossiste en moyenne ?

***Exercice* 29 :** Deux sujets sont proposés au choix à l'oral de mathématique :

le sujet A comprend quatre exercices indépendants.

le sujet B comprend deux exercices indépendants.

On admet que la probabilité de réussir l'un quelconque de ces exercices est p. L'oral sera réussi si la moitié des exercices proposés est bien traitée.
Quel sujet choisissez-vous ?