Espaces vectoriels et applications linéaires

Espace vectoriels

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants dire si F est un espace vectoriel.

1. $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$
2. $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = f(x)\}$
3. $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est croissante}\}$
4. $F = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid d^\circ P \geq 3\}$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x + y = 0 \text{ et } t = -x + 3z\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + 2y + 3z + t = 0\}$.

1. Montrez que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminez $F \cap G$ et donnez-en une base.

Exercice 3 : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{x} = ((1, 1, 0)$, $\vec{y} = (0, 0, 1)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$ et $\vec{b} = (1, 1, -1)$. Démontrez que $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\{\vec{x}, \vec{y}\} = \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Exercice 4 : On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $\vec{x} = (1, 2, 1)$, $\vec{y} = (2, -1, -2)$ et $\vec{z} = (-1, 2, k)$. Déterminez $k \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{z} \in \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\{\vec{x}, \vec{y}\}$.

Exercice 5 : Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes vérifiant :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad P = aX^4 + (a + b)X.$$

Montrez que F est un sous-espace vectoriel et donnez-en une base.

Exercice 6 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et considérons un polynôme $Q \in E$ non nul. Posons

$$F = \{P \in E \mid Q \ \text{ divise } P\}$$

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminez un supplémentaire G de F et donnez-en une base.

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On considère les sous-ensembles E_a et E_b de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$, définis par

$$E_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid (X - a) \mid P\} \quad \text{et} \quad E_b = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid (X - b) \mid P\},$$

où a et b désignent deux scalaires distincts.

1. Démontrez que E_a et E_b sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Prouvez l'existence d'un couple $(c, d) \in \mathbb{K}^2$ de scalaires tels que $c(X - a) + d(X - b) = 1$.
3. En déduire que $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

Exercice 8 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soit $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. On considère la famille finie $\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ définie par :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = e^{\alpha_k \cdot x}$$
Montrez que la famille $\mathscr{F}$ est libre.
2. On considère la famille $\mathscr{F} = \{f_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = e^{\alpha \cdot x}$. Démontrez que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

***Exercice* 9 :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et définissons $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \cos^n x$.
Montrez que la famille $\mathscr{F} = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

***Exercice* 10 :** Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que la famille $\mathscr{B} = \{1, (X-a), \dots, (X-a)^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soit $p \leq n$. Déterminez les coordonnées de $P = X^p$ dans la base $\mathscr{B}$.

***Exercice* 11 :** Montrez que $X^n, X^{n-1}(1+X), X^{n-2}(1+X)^2, \dots, (1+X)^n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Applications linéaires

***Exercice* 12 :** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x-y, y+z)$.

1. Montrez que f est une application linéaire.
2. Déterminez le noyau et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ?

***Exercice* 13 :** Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application appelée *fonctionnelle* de Dirac

$$\delta : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$$

1. Montrez que δ est une forme linéaire sur E.
2. Les sous-ensembles $\{f \in E \mid f(0) = 0\}$, $\{f \in E \mid f(0) = 1\}$ de E sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

***Exercice* 14 :** Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\vec{x}) = \vec{x} - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \vec{v}$$

1. Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrez que Φ est un projecteur.
3. Précisez les éléments caractéristiques de Φ.

***Exercice* 15 :** Etant donnée une matrice carrée d'ordre n $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **trace de A** comme la somme des éléments diagonaux de A : $\quad Tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Montrez que l'application $Tr : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & Tr(A) \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Démontrez que pour toutes matrices carrées A et B d'ordre n, on a : $Tr(A \times B) = Tr(B \times A)$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de matrices A et B telles que
$$A \times B - B \times A = I_n$$

***Exercice* 16 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul et $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[x]$ l'application qui à tout polynôme associe son polynôme dérivé.

1. Montrez que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Considérons l'application Γ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par
$$\Gamma = Id_{\mathbb{R}[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n.$$
Montrez que Γ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminez son isomorphisme réciproque.

Exercices supplémentaires

Espace vectoriels

***Exercice* 17 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $F \cup G$ est un sou-espace vectoriel de E.
Démontrez que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

***Exercice* 18 :** On considère dans $\mathbb{K}^4$ les vecteurs

$$\vec{u} = (1, 1, 0, -1);\ \vec{v} = (1, 0, 0, -1);\ \vec{w} = (1, 0, -1, 0);$$

Notons $F = \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + y - z + 2t = 0\}$
Déterminez une base de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

***Exercice* 19 :** On considère dans $\mathbb{K}^4$ les vecteurs

$$\vec{t} = (1, 2, 1, 0);\ \vec{u} = (2, -1, 0, 1);\ \vec{v} = (-1, 1, 1, 1);\ \vec{w} = (1, 1, 1, 1);\ \vec{x} = (1, 2, 0, 1);\ \vec{y} = (2, 1, 3, 1);\ \vec{z} = (7, 8, 9, 5).$$

Notons $A = \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ et $B = \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}\{\vec{t}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
Déterminez une base de A, B, $A + B$ et $A \cap B$.

***Exercice* 20 :** Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

1. Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Considérons les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (3, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ et notons $F = \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Vérifiez que $F \subset E$. A-t-on $E \subset F$?

Familles de vecteurs

***Exercice* 21 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et définissons $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \sin nx$.
Montrez que la famille $\mathscr{G} = \{g_n;\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

***Exercice* 22 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et définissons $f_n : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ h_n(x) = \sqrt[n]{x}$.
Montrez que la famille $\mathscr{H} = \{h_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$.

***Exercice* 23 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant pour un entier $p \in \mathbb{N}^\star$

$$f^p = 0 \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0.$$

Montrez qu'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x})\}$ soit libre.

Applications linéaires

***Exercice* 24 :** Soient f et g les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définies par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P' \quad \text{et} \quad g(P) = X \times P$$

1. Montrez que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminez $f \circ g - g \circ f$.

***Exercice* 25 :** Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P - P'$. Montrez que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminez son isomorphisme réciproque.

***Exercice* 26 :** Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrez que $p + q$ est un projecteur *si et seulement si* $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Supposons que $p + q$ soit un projecteur, montrez que

$$\mathsf{Ker}\, p + q = \mathsf{Ker}\, p \cap \mathsf{Ker}\, q \quad \text{et} \quad \mathsf{Im}\, p + q = \mathsf{Im}\, p \oplus \mathsf{Im}\, q.$$

***Exercice* 27 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^3 = Id_E$.
Etant donnés un scalaire $a \in \mathbb{K}$ et un vecteur $\vec{y} \in E$, déterminez $\vec{x} \in E$ de sorte que $\vec{x} + a \cdot f(\vec{x}) = \vec{y}$.

***Exercice* 28 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^3 = Id_E$.

1. Montrez que $\mathsf{Im}\,(f - Id_E) \subset \mathsf{Ker}\,(f^2 + f + Id_E)$.
2. Montrez que $\mathsf{Im}\,(f - Id_E) = \mathsf{Ker}\,(f^2 + f + Id_E)$.

***Exercice* 29 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant la relation

$$f^3 + 2f^2 - f - 2Id_E = 0.$$

Démontrez que pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe un triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, unique tel que

$$\begin{cases} \bullet \quad \vec{a} \in \mathsf{Ker}\,(f - Id_E) \\ \bullet \quad \vec{b} \in \mathsf{Ker}\,(f + Id_E) \\ \bullet \quad \vec{c} \in \mathsf{Ker}\,(f + 2Id_E) \\ \bullet \quad \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{cases}$$

Indication : il s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité : on pourra procéder par *Analyse-Synthèse*.
On notera :

$$E = \mathsf{Ker}\,(f - Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(f + Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(f + 2Id_E)$$