Feuille d'Exercices : stratégies de démonstration

Démonstration par contraposée, par l'absurde

Exercice 1 : Quantifier la définition d'injectivité, en faisant apparaître une implication. Donner une autre interprétation de l'injectivité en prenant la contraposée.

Exercice 2 : Que pensez-vous de l'implication "5 *impair* $\Rightarrow$ 3 *impair*" ? Enoncez sa négation, sa contraposée.

Exercice 3 : Que pensez-vous de l'implication "pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $x < 0 \Rightarrow x < x^2$? Enoncez sa négation, sa contraposée.

Exercice 4 : Démontrer par contraposée que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} m^2 \text{ impair} & \Rightarrow & m \text{ impair} \\ m^2 \text{ pair} & \Rightarrow & m \text{ pair} \end{array}$$

Exercice 5 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Démontrer par contraposée que :

$$\textbf{Si} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon \quad \textbf{alors} \quad a \leq b.$$

Exercice 6 : Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Démontrer qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$g \text{ est paire, } h \text{ est impaire, et } f = g + h.$$

$\triangleright$ *Analyse :* Supposons que de telles fonctions g et h existent.

1. Démontrer que nécessairement pour tout nombre réel x $\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(x) - h(x) \end{array}\right.$.
2. En déduire l'expression de $g(x)$ et de $h(x)$ en fonction de $f(x)$.

$\triangleright$ *Synthèse :* Conclure...

Exercice 8 : Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) \times f(y) - f(x.y) = x + y. \tag{1}$$

$\triangleright$ *Analyse :* Supposons qu'une telle fonction f existe.

1. Démontrer que nécessairement $f(0) = 1$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.

$\triangleright$ *Synthèse :* Conclure...